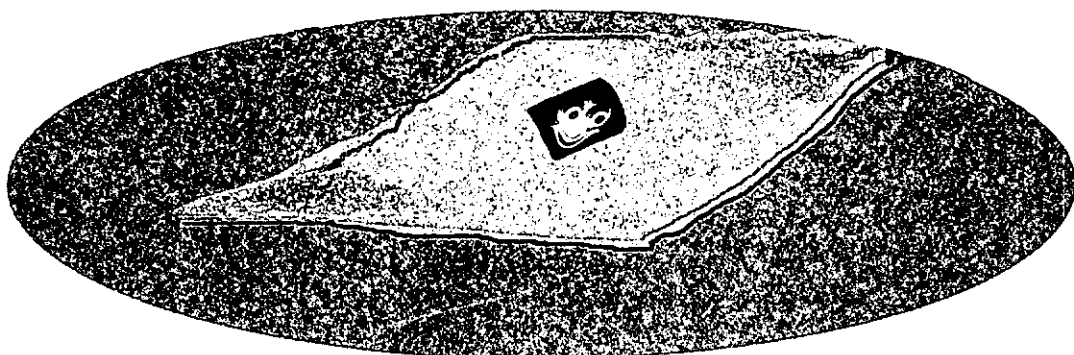




محمد هاشم رستمی

تعیین وضع نقطه و صفحه نسبت به هم



الف. تعیین وضع یک نقطه نسبت به یک صفحه

برای تعیین وضع نقطه $M. = (x., y., z.)$ نسبت به صفحه $P(x, y, z) = 0$ ، مختصات این نقطه را در معادله صفحه قرار می‌دهیم. اگر مختصات $M.$ در معادله صفحه P صدق کند؛ یعنی $P(x., y., z.) = 0$ باشد، نقطه $M.$ روی صفحه P است (شکل الف)، و اگر مختصات $M.$ در معادله صفحه P صدق نکند؛ یعنی $P(x., y., z.) \neq 0$ باشد، نقطه $M.$ روی صفحه P قرار ندارد (شکل ب).

مثال ۱. وضع نقطه $M. = (2, -1, 3)$ نسبت به صفحه $P: 3x - y - 4z + 5 = 0$ را تعیین کنید.
حل: داریم:

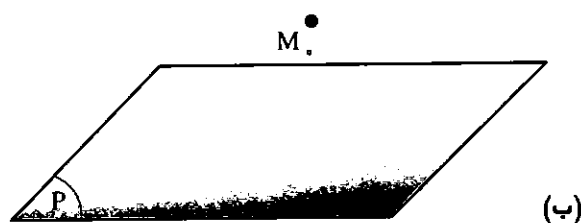
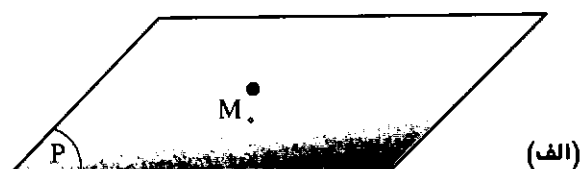
$$M. = (2, -1, 3) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}} 3(2) - (-1) - 4(3) + 5 = 0 \\ \Rightarrow 6 + 1 - 12 + 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

مختصات نقطه $M.$ در معادله صفحه P صدق کرده است، پس نقطه $M.$ روی صفحه P است.

مثال ۲. وضع نقطه $M. = (-1, 4, 5)$ نسبت به صفحه $P: -2x + 3y - z + 1 = 0$ را تعیین کنید.
حل: داریم:

$$M. = (-1, 4, 5) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}} -2(-1) + 3(4) - (5) + 1 = 0 \\ \Rightarrow +10 \neq 0$$

مختصات نقطه $M.$ در معادله صفحه P صدق نکرده

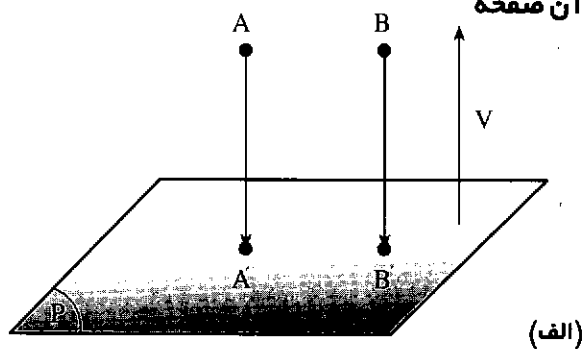


$$B = (-3, 0, 5) \rightarrow 2(-3) + (0) + 3(5) - 1 = +8 \neq 0$$

به طوری که دیده می شود، هر دو نقطه A و B روی صفحه قرار ندارند.

حال این سؤال پیش می آید که دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P قرار دارند یا در دو طرف این صفحه هستند؟
مطلب زیر به این سؤال پاسخ می دهد:

تعیین وضع دو نقطه غیر واقع بر یک صفحه نسبت به آن صفحه

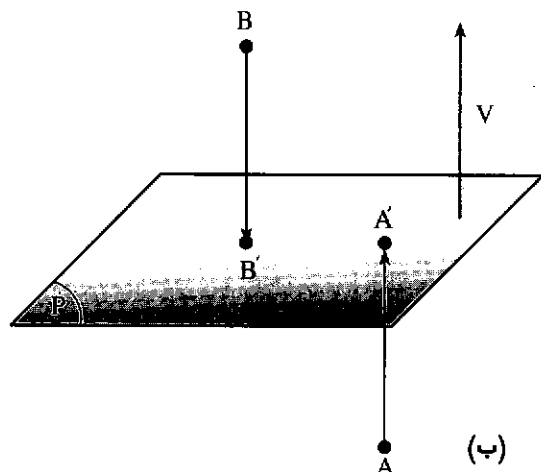


برای تعیین وضع دو نقطه $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ نسبت به صفحه $P: (x, y, z) = 0$ ، اندازه های جبری فاصله های این دو نقطه از صفحه P، یعنی

$$\overline{AA'} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{P(A)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\overline{BB'} = \frac{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{P(B)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

را تعیین می کنیم.



است، پس این نقطه روی صفحه P نیست.

مثال ۳. صفحه $P: (m+1)x - 2y + mz + m - 2 = 0$ و نقطه $M_0 = (-1, m-2, 3)$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که نقطه M_0 روی صفحه P باشد.
حل: مختصات نقطه M_0 باید در معادله صفحه P صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\begin{aligned} A &= (-1, m-2, 3) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه P}} \\ (m+1)(-1) - 2(m-2) + m(3) + m - 2 &= 0 \\ \Rightarrow -m - 1 - 2m + 4 + 3m + m - 2 &= 0 \\ \Rightarrow m + 1 &= 0 \Rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

مثال ۴. حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که نقطه $A = (m-1, 3, 2m)$ روی صفحه $P: 3x + 2y - 6z - 12 = 0$ قرار نداشته باشد.

حل: مختصات نقطه A در معادله صفحه P نباید صدق کند.

$$\begin{aligned} A &= (m-1, 3, 2m) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه P}} \\ 3(m-1) + 2(3) - 6(2m) - 12 &= 0 \\ \Rightarrow -9m - 9 &= 0 \Rightarrow -9m \neq 9 \Rightarrow m \neq -1 \end{aligned}$$

مثال ۵. صفحه $P: ax + by - 2z + 1 = 0$ و نقطه $A = (-3, 1, -4)$ داده شده اند. چه رابطه ای بین ضرایب های a و b برقرار باشد تا نقطه A روی صفحه P قرار داشته باشد؟
حل: مختصات نقطه A باید در معادله صفحه P صدق کند.

$$\begin{aligned} A &= (-3, 1, -4) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه P}} \\ a(-3) + b(1) - 2(-4) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow -3a + b + 8 + 1 &= 0 \Rightarrow -3a + b + 9 = 0 \end{aligned}$$

مثال ۶. وضع دو نقطه $A = (3, -4, 2)$ و $B = (-3, 0, 5)$ را نسبت به صفحه $P: 2x + y + 3z - 1 = 0$ تعیین کنید.
حل: داریم:

$$\begin{aligned} A &= (3, -4, 2) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}} 2(3) + (-4) + 3(2) - 1 = -7 \neq 0 \\ B &= (-3, 0, 5) \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}} 2(-3) + 0 + 3(5) - 1 = +8 \neq 0 \end{aligned}$$

$P(A)P(B) < 0$ باشند.

$$P(A)P(B) = (2m - 1 + m + 0 - 1)(m + 2 - 2m + 8 - 1) < 0$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) = (3m - 2)(-m + 9) < 0 \Rightarrow m < \frac{2}{3} \text{ و } m > 9$$

نکته. برای تعیین وضع چند نقطه A, B, C, D و... نسبت به صفحه $P(x, y, z) = 0$ ، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A), P(B), P(C), P(D)$ و... را تعیین کنیم. نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری هم علامت‌اند، در یک طرف صفحه P قرار دارند و نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری مختلف‌العلامت‌اند، در دو طرف صفحه P واقع‌اند.

مثال ۴. صفحه $P: 2x + y - 2z + 4 = 0$ و نقطه‌های $D = (1, -1, 3)$ و $C = (-5, -2, 0)$ ، $B = (2, 4, -3)$ ، $A = (0, -1, 1)$ داده شده‌اند. وضع این نقطه‌ها نسبت به صفحه P را تعیین کنید؛ یعنی مشخص کنید که کدام نقطه‌ها در یک طرف صفحه P قرار دارند و کدام نقطه‌ها در طرف دیگر صفحه P واقع‌اند. حل: $P(A), P(B), P(C), P(D)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A) = P(0, -1, 1) = 2(0) + (-1) - 2(1) + 4 = +1 > 0$$

$$P(B) = P(2, 4, -3) = 2(2) + (4) - 2(-3) + 4 = +18 > 0$$

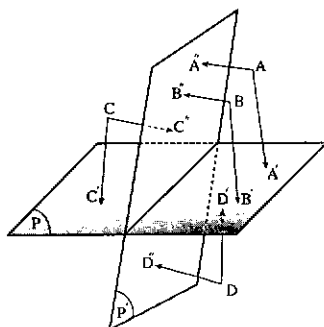
$$P(C) = P(-5, -2, 0) = 2(-5) + (-2) - 2(0) + 4 = -8 < 0$$

$$P(D) = P(1, -1, 3) = 2(1) + (-1) - 2(3) + 4 = -1 < 0$$

نقطه‌های A و B در یک طرف صفحه P و دو نقطه C و D در طرف دیگر صفحه P قرار دارند.

توجه. بدیهی است که هیچ کدام از این نقطه‌ها روی صفحه P قرار ندارند.

تعیین وضع دو یا چند نقطه نسبت به فرجه‌های مجاور و روبه‌روی حاصل از برخورد دو صفحه



اگر این اندازه‌های جبری هم علامت باشند، دو نقطه در یک طرف صفحه P قرار دارند (شکل الف) و اگر مختلف‌العلامت باشند، دو نقطه در دو طرف صفحه P واقع هستند (شکل ب). نکته. با توجه به این که $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ همواره مثبت است، پس علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$ ، همان علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ است. بنابراین برای تعیین وضع دو نقطه A و B نسبت به صفحه P ، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین کنیم.

مثال ۱. صفحه $P: 2x - 2y - z + 4 = 0$ و دو نقطه $A = (1, -4, 2)$ و $B = (-2, 3, -1)$ داده شده‌اند. وضع این دو نقطه نسبت به صفحه P را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:
 $P(A) = P(1, -4, 2) = 2(1) - 2(-4) - (-1) + 4 = +12 > 0$
 $P(B) = P(-2, 3, -1) = 2(-2) - 2(3) - (-1) + 4 = -5 < 0$
 چون $P(A) > 0$ و $P(B) < 0$ ؛ یعنی مختلف‌العلامت‌اند، پس دو نقطه A و B در دو طرف صفحه P قرار دارند. توجه. چون $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ است، پس دو نقطه A و B روی صفحه P قرار ندارند.

مثال ۲. وضع دو نقطه $A = (4, 0, -2)$ و $B = (-2, 2, 3)$ نسبت به صفحه $P: x - 2y + z - 3 = 0$ را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:
 $P(A) = P(4, 0, -2) = (4) - 2(0) + (-2) - 3 = -1 < 0$
 $P(B) = P(-2, 2, 3) = (-2) - 2(2) + (3) - 3 = -6 < 0$
 چون $P(A) < 0$ و $P(B) < 0$ ؛ یعنی این دو مقدار هم علامت هستند، پس دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P قرار دارند.

توجه. دو نقطه A و B روی صفحه P نیستند. (چرا؟).

مثال ۳. صفحه $P: mx + (1 - m)y + 2z - 1 = 0$ و دو نقطه $A = (2, -1, 0)$ و $B = (1, 2, 4)$ داده شده‌اند. حدود m را چنان تعیین کنید که این دو نقطه در دو طرف صفحه P باشند. حل: باید $P(A)$ و $P(B)$ مختلف‌العلامه، یعنی

با استفاده از علامت اندازه‌های جبری فاصله‌های دو یا چند نقطه مانند A, B, C و D از دو صفحه $P = (x, y, z) = 0$ و $P' = (x, y, z) = 0$ ، یعنی علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ ، $\overline{CC'}$ و $\overline{DD'}$ یا علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$ ، که به ترتیب هم علامت با

نقطه‌ها نسبت به فرجه‌های حاصل از برخورد دو صفحه P و P' را تعیین کنیم؛ یعنی مشخص سازیم که این نقطه‌ها درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجه مجاور و یا درون دو فرجه روبه‌رو (متقابل به یال). در شکل، دو نقطه A و B درون یک فرجه واقع‌اند، نقطه C با نقطه D در دو فرجه روبه‌رو قرار دارند و نقطه‌های C و D نسبت به هریک از دو نقطه A و B ، درون دو فرجه مجاور هستند.

مثال ۲. دو صفحه $P: 2x - y + 2z - 6 = 0$ و $P': x + 2y - 2z + 12 = 0$ و دو نقطه $A = (-3, \frac{1}{2}, 4)$ و $B = (2, 5, 1)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجه مجاور یا درون دو فرجه روبه‌رو.

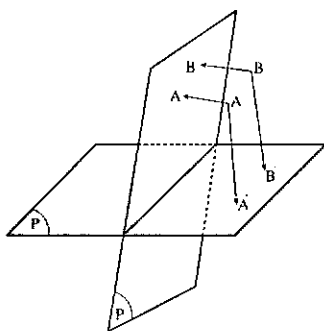
حل: دو صفحه P و P' متوازی نیستند؛ زیرا $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{+2} \neq \frac{+2}{-2}$ ، یعنی $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ است، بنابراین دو صفحه P و P' متقاطع‌اند. برای یافتن جواب مسأله، اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P'(A)$ و $P'(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A) = P(-3, \frac{1}{2}, 4) = 2(-3) - (\frac{1}{2}) + 2(4) - 6 = -\frac{9}{2} < 0$$

$$P(B) = P(2, 5, 1) = 2(2) - (5) + 2(1) - 6 = -5 < 0$$

$$P'(A) = P'(-3, \frac{1}{2}, 4) = (-3) + 2(\frac{1}{2}) - 2(4) + 12 = +2 > 0$$

$$P'(B) = P'(2, 5, 1) = (2) + 2(5) - 2(1) + 12 = +2 > 0$$



چون $P(A) < 0$ و $P(B) < 0$ است، دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P قرار دارند، از طرفی $P'(A) > 0$ و $P'(B) > 0$ است؛ بنابراین دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P' قرار دارند. در نتیجه، دو نقطه A و B درون یک فرجه حاصل از برخورد دو صفحه P و P' واقع‌اند.

مثال ۳. دو صفحه $P: 2x + y + 5 = 0$ و $P': x - 2z + 3 = 0$ و نقطه‌های $A = (0, 3, 1)$ ، $B = (2, 0, 4)$ و $C = (-1, -4, 2)$ داده

مثال ۱. دو صفحه متقاطع $P: x + y - 3z + 2 = 0$ و $P': 2x - 2y + z - 3 = 0$ و دو نقطه $A = (-3, 2, 4)$ و $B = (1, -3, 5)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا در دو فرجه مجاور یا در دو فرجه روبه‌رو.

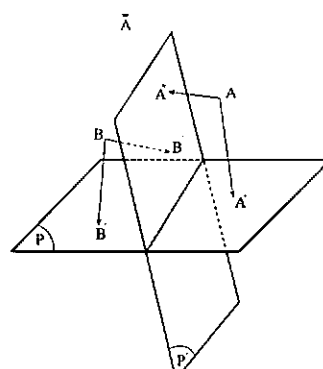
حل: اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P'(A)$ و $P'(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A) = P(-3, 2, 4) = (-3) + (2) - 3(4) + 2 = -11 < 0$$

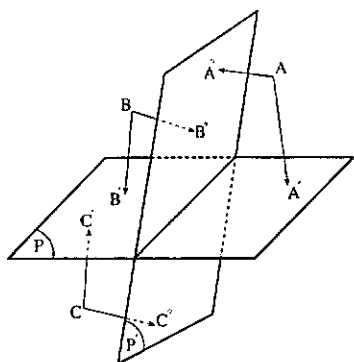
$$P(B) = P(1, -3, 5) = (1) + (-3) - 3(5) + 2 = -15 < 0$$

$$P'(A) = P'(-3, 2, 4) = 2(-3) - 2(2) + (4) - 3 = -9 < 0$$

$$P'(B) = P'(1, -3, 5) = 2(1) - 2(-3) + (5) - 3 = +10 > 0$$



چون $P(A) < 0$ ، $P(B) < 0$ است، پس دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P قرار دارند. از طرفی $P'(A) < 0$ و



با توجه به مقدارهای به دست آمده، نقطه‌های A و B در یک طرف صفحه P قرار دارند و نقطه C در طرف دیگر این صفحه است. از طرفی، نقطه‌های B و C در یک طرف صفحه P' و نقطه A در طرف دیگر این صفحه است؛ بنابراین نقطه‌های A و B درون دو فرجه مجاور قرار دارند، نقطه‌های A و C درون دو فرجه روبه‌رو (متقابل) و دو نقطه B و C نیز درون دو فرجه مجاور واقع هستند.

شده‌اند. تعیین کنید که این نقطه‌ها درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجه مجاور و یا درون دو فرجه روبه‌رو.

حل: صفحه‌های P و P' متوازی نیستند (چرا؟)؛ پس این دو صفحه متقاطع هستند. از طرفی هیچ‌یک از نقطه‌های A، B و C روی صفحه‌های P و P' قرار ندارند (چرا؟). بنابراین برای حل مسأله، اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P'(A)$ ، $P'(B)$ و $P'(C)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A) = P(0, 3, 1) = 2(0) + (3) + 5 = +8 > 0$$

$$P(B) = P(2, 0, 4) = 2(2) + (0) + 5 = +9 > 0$$

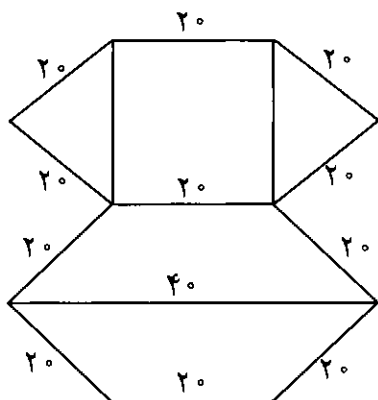
$$P(C) = P(-1, -4, 2) = 2(-1) + (-4) + 5 = -1 < 0$$

$$P'(A) = P'(0, 3, 1) = (0) - 2(1) + (3) = +1 > 0$$

$$P'(B) = P'(2, 0, 4) = (2) - 2(4) + 3 = -1 < 0$$

$$P'(C) = P'(-1, -4, 2) = (-1) - 2(2) + 3 = -2 < 0$$


فریح اندیشه ... فریح اندیشه ... فریح اندیشه ...



یک شکل پنج وجهی بسته دارای شرایط زیر است:

(الف) دو وجه که مثلث‌هایی

متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲۰ سانتیمترند.

(ب) دو وجه که دوزنقه‌هایی متساوی‌الساقین به

ضلع‌های ۲۰، ۲۰، ۲۰، ۴۰ سانتیمترند.

(ج) یک وجه که مربعی به ضلع ۲۰ سانتیمتر

است؛ شکل را رسم کنید.