

تعیین نوع مقطع مخروطی

برای دانش آموزان دوره ی پیش دانشگاهی

● حسین کریمی

نشان داد: $f(2\alpha - x, 2\beta - y) = f(x, y)$ بدیهی است که $b^2 - 4ac \neq 0$ فرض شده است.

نکته ی ۴: اگر دو خط $\Delta: f'_x = 0$ و $\Delta': f'_y = 0$ به موازات هم نباشند، $(\Delta: 2ax + by + d = 0, \Delta': bx + 2cy + e = 0)$ یعنی $b^2 - 4ac \neq 0$ ، نقطه ی تلاقی آن ها همان نقطه ی A (که در نکته ی ۳ قید شد) است.

نکته ی ۵: اگر دو خط $\Delta: f'_x = 0$ و $\Delta': f'_y = 0$ به موازات هم باشند $(b^2 - 4ac = 0)$ نقطه ی منحصر به فرد A به عنوان مرکز تقارن وجود نخواهد داشت. در این صورت یکی از دو وضعیت زیر را داریم:

(I) اگر $\Delta \neq \Delta'$ ، آن گاه مکان فاقد مرکز تقارن خواهد بود.
(II) اگر $\Delta = \Delta'$ ، آن گاه مکان بی شمار مرکز تقارن خواهد داشت که هر نقطه از خط Δ را می توان به عنوان مرکز تقارن برای مکان در نظر گرفت.

نکته ی ۶: نقطه، دو خط متقاطع، هذلولی و بیضی، یک مرکز تقارن دارند. تهی، یک خط و دو خط موازی، دارای بی شمار مرکز تقارن هستند. در مورد تهی، به انتهای مقدم در ترکیب شرطی نکته ی ۲ استناد می کنیم. در مورد یک خط، هر نقطه ی واقع بر آن، مرکز تقارن محسوب می شود. در مورد دو خط موازی، هر نقطه ی واقع بر خطی که موازی با آن دو و به یک فاصله از آن دو خط باشد را به عنوان مرکز تقارن می پذیریم. و بدیهی است که سهمی فاقد مرکز تقارن است.

در کتاب هندسه ی تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی دیدیم که معادله ی هر مقطع مخروطی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ ، آن گاه مکان عبارت است از دو خط متقاطع و یا هذلولی.

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، آن گاه مکان عبارت است از تهی، نقطه، دایره و یا بیضی.

اگر $b^2 - 4ac = 0$ ، آن گاه مکان عبارت است از تهی، خط، دو خط موازی، کل صفحه و یا سهمی.

حال می خواهیم با توجه به علامت $b^2 - 4ac$ و وضعیت مرکز تقارن، نوع مکان را دقیقاً مشخص کنیم. برای این منظور، ابتدا به نکات زیر توجه می کنیم:

نکته ی ۱: اگر $b \neq 0$ ، آن گاه مکان نه دایره است و نه کل صفحه.

نکته ی ۲: اگر K نقطه ای دلخواه از مکان باشد و قرینه ی K نسبت به A، نقطه ای از همان مکان، آن گاه نقطه ی A مرکز تقارن آن مکان خواهد بود.

نکته ی ۳: نقطه ی $A(\alpha = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \beta = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac})$

مرکز تقارن $f(x, y) = 0$ است که البته با انجام محاسباتی کمی خسته کننده، می توان درستی آن را تحقیق کرد. یعنی می توان

اکنون نوع مکان‌ها را به طور دقیق معرفی می‌کنیم:

حالت اول. اگر $b^2 - 4ac > 0$ و $f(\alpha, \beta) = 0$ ، آن‌گاه مکان، دو خط متقاطع است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی دو خط متقاطع واقع است.

مثال ۱: نوع مکان هندسی به معادله

$$f(x, y) = 10x^2 + 13xy - 3y^2 + 7x + 19y - 6 = 0$$

تعیین کنید.

حل:

$$A: \begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 20x + 13y + 7 = 0 \\ 13x - 6y + 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 1)$$

$$b^2 - 4ac = 289 > 0$$

$$f(-1, 1) = 10 - 13 - 3 - 7 + 19 - 6 = 0$$

در نتیجه مکان دو خط متقاطع است.

حالت دوم. اگر $b^2 - 4ac > 0$ و $f(\alpha, \beta) \neq 0$ ، آن‌گاه مکان یک هذلولی است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن بر هذلولی واقع نیست و روی مکان قرار ندارد.

مثال ۲: نوع مکان هندسی به معادله

$$f(x, y) = 12x^2 - 5xy - 3y^2 - 73x - 20y + 16 = 0$$

تعیین کنید.

حل:

$$A: \begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 24x - 5y - 73 = 0 \\ -5x - 6y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, -5)$$

$$b^2 - 4ac = 169 > 0$$

$$f(2, -5) = 48 + 50 - 75 - 146 + 100 + 16 = -7 \neq 0$$

در نتیجه مکان یک هذلولی است.

حالت سوم. اگر $b^2 - 4ac < 0$ و $f(\alpha, \beta) < 0$ ، آن‌گاه مکان یک بیضی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن درون منحنی است.

مثال ۳: نوع مکان هندسی به معادله زیر را تعیین کنید.

$$f(x, y) = 3x^2 + 7xy + 5y^2 - 20x - 27y + 11 = 0$$

حل:

$$A: \begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 6x + 7y - 20 = 0 \\ 7x + 10y - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 2)$$

$$b^2 - 4ac = -11 < 0$$

$$f(1, 2) = 3 + 14 + 20 - 20 - 54 + 11 = -26 < 0$$

در نتیجه مکان یک بیضی است.

حالت چهارم. اگر $b^2 - 4ac < 0$ و $f(\alpha, \beta) = 0$ ، آن‌گاه مکان یک نقطه است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی مکان واقع است و مکان همان نقطه A است.

مثال ۴: نوع مکان هندسی به معادله زیر را تعیین کنید.

$$f(x, y) = 5x^2 + 10xy + 25y^2 - 10x + 70y + 85 = 0$$

حل:

$$A: \begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 10x + 10y - 10 = 0 \\ 10x + 50y + 70 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3, -2)$$

$$b^2 - 4ac = -400 < 0$$

$$f(3, -2) = 45 - 60 + 100 - 30 - 140 + 85 = 0$$

در نتیجه مکان همان نقطه $A(3, -2)$ است.

حالت پنجم. اگر $b^2 - 4ac < 0$ و $f(\alpha, \beta) > 0$ ، آن‌گاه مکان تهی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن خارج مکان واقع است.

مثال ۵: نوع مکان هندسی به معادله زیر را تعیین کنید.

$$f(x, y) = 13x^2 + 26xy + 26y^2 + 26x + 78y + 66 = 0$$

حل:

$$A: \begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 26x + 26y + 26 = 0 \\ 26x + 52y + 78 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, -2)$$

$$b^2 - 4ac = -676 < 0$$

$$f(1, -2) = 13 - 52 + 104 + 26 - 156 + 66 = 1 > 0$$

در نتیجه مکان تهی است.

حالت ششم. اگر $b^2 - 4ac = 0$ و $\Delta \neq \Delta'$ ، آن‌گاه مکان یک سهمی است؛ چرا که در این حالت دو خط متمایز و موازی Δ و Δ' را داریم که فاقد نقطه‌ی مشترکند. یعنی نقطه‌ی A به عنوان مرکز تقارن وجود ندارد و می‌دانیم که سهمی نیز فاقد مرکز تقارن است.

مثال ۶: نوع مکان هندسی به معادله زیر را تعیین کنید.

$$f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - x + 7y + 11 = 0$$

حل:

$$\begin{cases} \Delta: f'_x = 0 \\ \Delta': f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y - 1 = 0 \\ \Delta': 4x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

مکان یک سهمی است $\Delta \neq \Delta'$ ، $\Delta \parallel \Delta'$

حالت هفتم. اگر $b^2 - 4ac = 0$ و $\Delta = \Delta'$ و $f(x_B, y_B) > 0$ ، آن‌گاه مکان تهی در آن نقطه‌ی دلخواهی از Δ است.

