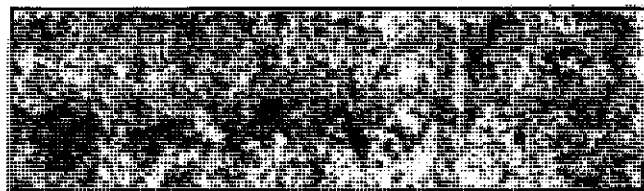


تعیین دامنه و برد توابع

(قسمت سوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی



۹- تعیین دامنه و برد توابع معکوس^{۱۴} (وارون):

تعیین دامنه و برد توابع معکوس وقتی معنا پیدا می‌کند که یک به یک بودنشان مسلم باشد، زیرا شرط لازم و کافی برای آن که تابع f وارون پذیر باشد، آن است که f یک به یک باشد. به بیان دیگر اگر f یک به یک نباشد وارون آن یعنی f^{-1} یک تابع نیست. به عنوان مثال وارون تابع زیر یک تابع نیست زیرا یک به یک نیست.

$$f = \{(-1, 4) \text{ و } (1, 3) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (3, 4)\}$$

f^{-1} یک رابطه است و تابع نیست زیرا داریم:

$$R = f^{-1} = \{(4, -1) \text{ و } (3, 1) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (4, 3)\}$$

و دو زوج مرتب $(4, -1)$ و $(4, 3)$ در آن موجود است که مؤلفه اول آنان با هم مساوی است ولی مؤلفه دوم آنان با هم مساوی نیست. بدیهی است که این رویداد از عدم یک به یک بودن تابع ناشی شده است. می‌دانیم اگر تابعی یک به یک باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن یافت نمی‌شود که مؤلفه دوم آنان با هم مساوی باشد. همچنین می‌دانیم نمودار هر تابع و تابع معکوس آن نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند، زیرا دو نقطه $M(x, y)$ و $M'(y, x)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات قرینه یکدیگر می‌باشند. بنابراین در این جا

نتیجه می‌شود که اگر f تابعی از D_f به R_f ($f: D_f \rightarrow R_f$) تعریف شده باشد و همچنین f یک به یک باشد آنگاه تابع معکوس (وارون) آن f^{-1} از R_f به D_f ($f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$) تعریف خواهد شد و داریم:

$$D_{f^{-1}} = R_f, R_{f^{-1}} = D_f$$

توجه: f^{-1} نمادی برای تابع معکوس (وارون) است و نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه شود.

مثال ۲۹: دامنه و برد تابع معکوس f و مجموعه f^{-1} را به دست آورید.

حل: همان طور که مشاهده می‌شود تابع f یک به یک است پس معکوس پذیر است و داریم:

$$D_f = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5\} \text{ و } R_f = \{-1 \text{ و } 1 \text{ و } 3\}$$

بنابراین دامنه و برد تابع معکوس f یعنی f^{-1} چنین است:

$$D_{f^{-1}} = R_f = \{-1 \text{ و } 1 \text{ و } 3\} \text{ و } R_{f^{-1}} = D_f = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5\}$$

مجموعه f^{-1} چنین است:

$$f^{-1} = \{(3, 1) \text{ و } (1, -1) \text{ و } (5, 3)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \\ -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2}$	-	+	-	-	+	-	-	-
$\frac{-x^2 + 2x + 1}{1 - x^2}$	+	+	-	+	+	-	+	+

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup [1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty)$$

$$y = \text{Arc sin } \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow \sin y = \frac{2x}{1-x^2} \quad \text{تعیین برد تابع:}$$

$$(1-x^2) \sin y = 2x \Rightarrow \sin y - x^2 \sin y = 2x$$

$$x^2 \sin y + 2x - \sin y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sin^2 y}}{\sin y}$$

$$\sin y \neq 0 \Rightarrow y \neq k\pi$$

برای برد تابع معکوس سینوسی یکی از بازه‌های زیر را می‌توان انتخاب کرد. زیرا تابع سینوسی در هر یک از فاصله‌های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

$$\dots \text{ یا } \left| \frac{-3\pi}{2} \text{ و } \frac{-\pi}{2} \right| \text{ یا } \left| \frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2} \right| \text{ یا } \left| \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2} \right| \text{ یا } \dots$$

معمولاً برای سادگی برد تابع معکوس سینوسی را بازه $\left| \frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2} \right|$ اختیار می‌کنند. بنابراین برد تابع فوق چنین است:

$$R_f = \left| \frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2} \right|$$

مثال ۳۰: دامنه و برد تابع با ضابطه $y = g(x) = \text{Arc cos } x$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ضابطه تابع نتیجه می‌شود که تابع فوق وارون تابع $f(x) = \cos x$ است. از آنجا که تابع $f(x) = \cos x$ در هر یک از بازه‌های زیر یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است:

$$\dots \text{ یا } [2\pi \text{ و } \pi] \text{ یا } [\pi \text{ و } 0] \text{ یا } [0 \text{ و } -\pi] \text{ یا } [-\pi \text{ و } -2\pi] \text{ یا } \dots$$

بنابراین هر یک از بازه‌های فوق را می‌توان به عنوان برد تابع $g(x)$ در نظر گرفت.

با انتخاب یکی از بازه‌های فوق در هر صورت دامنه تابع $g(x)$ چنین نتیجه خواهد شد:

$$D_g = [-1 \text{ و } 1]$$

معمولاً برای سادگی، بازه $[0 \text{ و } \pi]$ را برای برد تابع $g(x)$ اختیار می‌کنند:

$$R_g = [0 \text{ و } \pi]$$

مثال ۳۱: دامنه و برد تابع با ضابطه زیر را تعیین کنید.

$$y = f(x) = \text{Arc sin } \frac{2x}{1-x^2}$$

حل: تعیین دامنه تابع: $D_f = \left\{ x \mid -1 \leq \frac{2x}{1-x^2} \leq 1 \right\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} \leq 1 \\ \frac{2x}{1-x^2} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2} \leq 0 \\ \frac{-x^2 + 2x + 1}{1 - x^2} \geq 0 \end{cases}$$

مثال ۳۲: دامنه و برد تابع با ضابطه زیر را تعیین کنید.

$$y = g(x) = \text{Arc} \lg x$$

حل: با توجه به ضابطه تابع نتیجه می شود که تابع $g(x)$ وارون تابع $f(x) = \lg x$ است. تابع $f(x)$ در بازه های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است:

$$\dots \text{یا } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ یا } \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ یا } \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right) \text{ یا } \dots$$

با انتخاب هر یک از این فاصله ها برای برد تابع $g(x)$ در هر صورت دامنه تابع $g(x)$ چنین است:

$$D_g = (-\infty, +\infty)$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ را می توان یکی از بازه های فوق اختیار کرد. معمولاً برای سادگی برد تابع $g(x)$ را در بازه $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ در نظر می گیرند. بنابراین داریم:

$$R_g = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

۱۰- تعیین دامنه و برد توابع مرکب^{۱۵}:

ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $f(g(x))$ یا $f \circ g(x)$ نمایش می دهیم و آن را تابع مرکب می نامیم و در حالت عمومی دامنه آن را چنین تعریف می کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

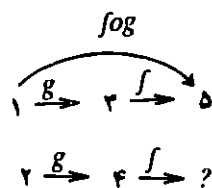
به طور کلی همواره می توان دامنه و برد تابع مرکب $f \circ g$ را پس از ترکیب دو تابع f و g تعیین کرد.

مثال ۳۳: توابع $\{f\}$ و $\{g\}$ مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $f \circ g$ ب) $g \circ f$ ج) $(g - f) \circ (2f + 3g)$ د) $(\frac{f}{g}) \circ (2f \cdot g)$

حل: الف) می دانیم: $f \circ g(x) = f(g(x))$

با توجه به مجموعه های f و g و تعریف تابع مرکب داریم:

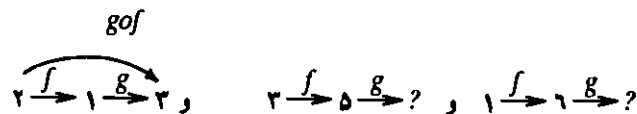


بنابراین $f \circ g = \{(1, 5) \text{ و } (2, 4)\}$

بدیهی است در این جا می توان با توجه به مجموعه $f \circ g$ دامنه و برد آن را تعیین کرد:

$$D_{f \circ g} = \{1, 2\} \text{ و } R_{f \circ g} = \{5, 4\}$$

ب) می دانیم: $g \circ f(x) = g(f(x))$



بنابراین $g \circ f = \{(2, 3)\}$ و $D_{g \circ f} = \{2\}$ و $R_{g \circ f} = \{3\}$

ج) لازم به توضیح است که معنی kf این است که مؤلفه دوم هر زوج مرتب k برابر کنیم. به عنوان مثال اگر $(a, b) \in f$ آنگاه $(a, kb) \in kf$ است. در این صورت اگر $(a, b) \in f$ آنگاه $(a, 2b) \in 2f$ است. بنابراین داریم:

$$D_{f \circ g} = \{1, 2\} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 18 \times 2) \text{ و } (2, 3 \times 4)\}$$

$$f \circ g = \{(1, 54) \text{ و } (2, 12)\}$$

$$(f \circ g) \circ \left(\frac{f}{g}\right)$$

$$2 \xrightarrow{\frac{f}{g}} 1 \xrightarrow{f \circ g} ?$$

$$\Rightarrow (f \circ g) \circ \left(\frac{f}{g}\right) = \{(1, 12)\} \Rightarrow$$

$$D_{(f \circ g) \circ \left(\frac{f}{g}\right)} = \{1\} \text{ و } R_{(f \circ g) \circ \left(\frac{f}{g}\right)} = \{12\}$$

مثال ۳۴: توابع با ضوابط $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 10^{-10} \cdot \log(\log x)$ مفروضند؛ دامنه و برد توابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کنید.

حل: در ابتدا دامنه هریک از توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$D_f = \{x \mid \log x > 0\} = (1, +\infty) \text{ و } D_g = R - \{0\}$$

تابع $f(x)$ در دامنه تعریفش به شکل ساده شده $f(x) = \frac{1}{x}$ تحویل می‌شود:

$$f(x) = 10^{-10} \cdot \log(\log x) \xrightarrow{\log x > 0}$$

$$f(x) = 10^{-10} \cdot \log x = 10^{-10} \cdot \log \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } D_f = (1, +\infty)$$

بنابراین با توجه به دامنه‌های توابع داریم:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in R - \{0\} \mid \frac{1}{x} > 1\} = (0, 1) \end{aligned}$$

$$f = \{(2, 2) \text{ و } (3, 10) \text{ و } (1, 12)\}$$

$$g = \{(1, 9) \text{ و } (2, 12) \text{ و } (4, 3)\}$$

$$f = \{(2, 3) \text{ و } (3, 15) \text{ و } (1, 18)\}$$

از طرفی می‌دانیم: $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$D_{f+g} = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow f + g = \{(1, 12 + 9) \text{ و } (2, 2 + 12)\}$$

$$f + g = \{(1, 21) \text{ و } (2, 14)\}$$

$$\Rightarrow R_{f+g} = \{14, 21\}$$

همچنین داریم:

$$D_{g-f} = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow g - f = \{(1, 3 - 18) \text{ و } (2, 4 - 3)\}$$

$$= \{(1, -15) \text{ و } (2, 1)\}$$

$$R_{g-f} = \{-15, 1\}$$

و بنابراین داریم: $(f + g) \circ (g - f) = \{(2, 21)\}$

$$\begin{aligned} & (f + g) \circ (g - f) \\ & 1 \xrightarrow{g-f} (-15) \xrightarrow{f+g} ? \text{ و } 2 \xrightarrow{g-f} 1 \xrightarrow{f+g} 21 \end{aligned}$$

در نتیجه دامنه و برد تابع مرکب فوق چنین است:

$$D_{(f+g) \circ (g-f)} = \{2\}$$

$$R_{(f+g) \circ (g-f)} = \{21\}$$

(د) داریم:

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= \{1, 2\} \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{9}) \text{ و } (2, \frac{1}{4})\} \\ &= \{(1, 2) \text{ و } (2, \frac{1}{4})\} \end{aligned}$$

مثال ۳۵: توابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $gof(x) = \sqrt{x+1}$ مفروضند. دامنه و برد تابع مرکب $fog(x)$ را تعیین کنید.

حل: برای تعیین دامنه و برد تابع $fog(x)$ ابتدا باید ضابطه آن را بیابیم. برای این منظور ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \sqrt{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t}$$

$$g(t) = \sqrt{\frac{t}{1-t} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

t متغیر ظاهری است، بنابراین ضابطه $g(x)$ چنین است:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

اینک ضابطه $fog(x)$ را می نویسیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1} \xrightarrow{x \neq 1} y = fog(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}$$

تعیین دامنه تابع fog :

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow D_{fog} = (-\infty, 1)$$

تعیین برد تابع fog : ابتدا از ضابطه تابع نتیجه می شود: $y > 0$.
همچنین داریم:

$$1 + \sqrt{1-x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{1-x} = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y} > 0$$

$$D_{gof} = \{x \in D_g \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in (1 + \infty) \mid \frac{1}{x} \in R - \{0\}\} = (1 + \infty)$$

همچنین برای تابع fog داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 10 \cdot \log \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \\ \Rightarrow x \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow y = fog(x) = 1 - 10 \cdot \log \frac{1}{x} = 10 \cdot \log x \quad x \in (0, 1)$$

$$y = fog(x) = x \Rightarrow D_{fog} = (0, 1)$$

تعیین برد تابع fog :

$$y = x \Rightarrow x = y \in (0, 1) \Rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow R_{fog} = (0, 1)$$

و همین طور برای تابع gof داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(1 - 10 \cdot \log(\log x)) = 10 \cdot 10 \cdot \log(\log x)$$

$$\Rightarrow \log x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow gof(x) = 10 \cdot \log x$$

$$x > 1 \Rightarrow gof(x) = x, x \in (1 + \infty) \Rightarrow D_{gof} = (1 + \infty)$$

تعیین برد تابع gof :

$$z = gof(x) = x \Rightarrow x = z \in (1 + \infty)$$

$$\Rightarrow z > 1 \Rightarrow R_{gof} = (1 + \infty)$$

بنابراین به طور خلاصه دامنه و برد توابع fog و gof چنین

می شوند:

$$D_{fog} = R_{fog} = (0, 1)$$

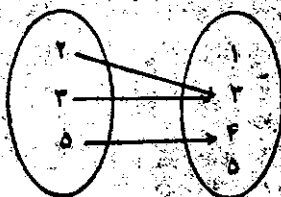
$$D_{gof} = R_{gof} = (1 + \infty)$$

پوزش: صورت مسأله ۲۴ در قسمت دوم، مندرج در شماره ۷ برهان به شکل زیر اصلاح شود.

دامنه و برد تابع با ضابطه زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \sqrt{\log \left(\frac{1 \cdot (x+1)}{x^2 - 1} \right) \left(\frac{x^2 - 1}{x+1} \right)} + \cos x$$

شماره ۱۱، مندرج در برهان ۶ به شکل زیر اصلاح شود.



ادب ریاضی

دومین شاخه ریاضیات که در آن تحولات قرن نوزدهم تأثیر زیادی بر کار علمی آنی داشت هندسه بود، زیرا در این قرن دو نظام هندسی کاملاً تازه مطرح شد. این نظامات ناشی از شکست دو قضیه هندسه اقلیدس بود. طرح کلی هندسه اقلیدس بسی استادانه و یادواره باشکوه منطق انسان بود. این هندسه بیش از دو هزار سال بلاسازح حکم رانده و تا قرن نوزدهم، کم‌کم مترادف با جنبه‌ای از معنی و حقیقت شده بود. اما دو قضیه وجود داشت که با هیچ استدلال منطقی قابل اثبات نبود. یکی مشعر بر این بود که پاره خط را می‌توان از هر دوسو تا بی نهایت امتداد داد. دیگری اشعار می‌داشت که دو خط موازی، تا هر جا که امتداد یابند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند. گرچه هر دو بدیهی به نظر می‌رسند، اما نه اقلیدس و نه هندسه‌دانهای بعد از او هیچ یک نتوانستند آنها را رسماً به اثبات برسانند. اقلیدس خود همیشه در مورد این دو قضیه احتیاط می‌کرد و سعی داشت تا آن جا که می‌تواند از فرض خطوط موازی استفاده نکند.

کالین ارنان. تاریخ علم کمبریج

حسن افشار

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-y}{y} > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1$$

بنابراین برد تابع چنین است: $R_{f \circ g} = (0 و 1)$

مثال ۳۶: اگر $f(x) = x - 1$ و $f \circ g(x) = \frac{1}{x-1}$ آنگاه دامنه و برد تابع مرکب $g \circ f(x)$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا ضابطه تابع $g \circ f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - 1$$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = g(x) - 1$$

$$\frac{1}{x-1} = g(x) - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{x-1}$$

اینک ضابطه $g \circ f(x)$ را می‌نویسیم:

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_{g \circ f} = R - \{2\}$$

$$y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-1} \quad \text{تعیین برد تابع } g \circ f$$

$$y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow R_{g \circ f} = R - \{1\}$$

در این جا به بحث و بررسی دامنه و برد توابع خاتمه می‌دهیم و در شماره‌های آینده مجله به مطالب جنبی دیگر تابع می‌پردازیم.