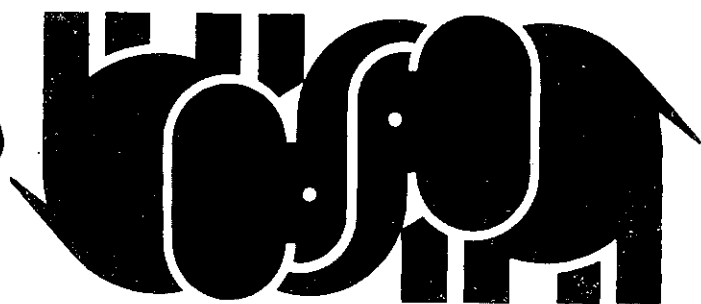




تعیین تعداد روابط روی یک مجموعه متناهی، تحت شرایطی خاص

از جمله منعکس بودن، متقارن بودن و ...،

هم ارز بودن رابطه

قابل استفاده دانش آموزان دوره

پیش دانشگاهی (ریاضیات گسسته)



• ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده

دبیر ریاضی - اراک

• منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و

ترکیبیاتی (رالف - پ - گریمالدی)

است با تعداد زیرمجموعه های مجموعه $A \times A$. با توجه به این که $|A \times A| = n^2$ لذا تعداد روابط تعریف شده روی مجموعه A ، برابر است با 2^{n^2} . از طرفی، تعداد اعداد حسابی از 0 تا 2^{n^2} ، برابر $2^{n^2} + 1$ می باشد. لذا طبق اصل لانه کبوتری، چون $2^{n^2} + 1 > 2^{n^2}$ ، هرگاه روابط تعریف شده روی مجموعه A را لانه کبوترها و اعداد طبیعی از 0 تا 2^{n^2} را کبوترها در نظر بگیریم، نتیجه خواهیم گرفت، دو عدد حسابی مانند s و t وجود دارد که $R^s = R^t$ ، به طوری که $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$.

تعریف. خاصیت بازتابی (انعکاسی): هرگاه $A \neq \emptyset$ و رابطه R روی A تعریف شده باشد گوئیم خاصیت بازتابی یا انعکاسی دارد؛ هرگاه برای هر عضو مجموعه A مانند a ، $(a, a) \in R$ در R موجود باشد.

برای یادآوری ابتدا تعریف خاصیت مورد نظر، مطرح می شود و سپس به بررسی تعیین تعداد روابطی که دارای آن خاصیت می باشند، می پردازیم.

تعریف رابطه: هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، هر زیرمجموعه $A \times B$ را یک رابطه از A در B می نامیم.

قرارداد: هرگاه R از A در A تعریف شود، یعنی $R \subset A \times A$ می گوئیم رابطه R روی A تعریف شده است.

مسئله ۱: برای رابطه R روی مجموعه A ، فرض کنید $R^0 = \{(a, a) | a \in A\}$. اگر $|A| = n$ ، ثابت کنید $s, t \in W$ وجود دارد که $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$ ، به طوری که $R^s = R^t$ (راهنمایی: از اصل لانه کبوتری استفاده کنید).

($W = N \cup \{0\}$ = مجموعه اعداد حسابی)

حل: می دانیم تعداد روابط تعریف شده روی مجموعه A برابر

تعیین تعداد روابط متقارن روی مجموعه n عضوی A
 برای شمردن تعداد روابط متقارن روی
 $A \times A$ ، $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ را به صورت اجتماع دو مجموعه
 جدا از هم A_1 و A_2 می نویسیم، که:

$$A_1 = \{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow |A_1| = n$$

و

$$A_2 = \{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \Rightarrow |A_2| = n^2 - n$$

بنابراین هر زوج مرتب $A \times A$ دقیقاً در یکی از دو مجموعه

A_1 و A_2 وجود دارد. مجموعه A_2 شامل $\frac{n^2 - n}{2}$ زیرمجموعه

۲ عضوی به شکل $S_{ij} = \{(a_i, a_j), (a_j, a_i) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

می باشد. با توجه به این که هدف ساختن رابطه متقارن R روی A می باشد، هریک از n عضو A_1 می تواند عضو R باشد یا نباشد، لذا برای هر عضو A_1 دو انتخاب وجود دارد.

و نیز برای هریک از $\frac{n^2 - n}{2}$ زیرمجموعه A_2

$(S_{ij}, 1 \leq i < j \leq n)$ دو انتخاب وجود دارد (می تواند هر دو زوج مرتب، اعضای رابطه R باشند یا هیچ کدام از دو زوج، عضو R

نباشند). بنابراین، طبق اصل ضرب $2^{\frac{n^2 - n}{2}} \times 2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 - n}{2}}$ رابطه متقارن روی مجموعه n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط منعکس و متقارن روی مجموعه n عضوی A

با روشی مشابه، تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل می کنیم؛ با این تفاوت که چون رابطه، علاوه بر متقارن بودن، باید منعکس نیز باشد، لذا برای هر زوج مرتب در A_1 فقط یک انتخاب وجود دارد (چون حتماً باید عضو رابطه باشد). بنابراین، تعداد

تعیین تعداد روابط منعکس روی مجموعه متناهی A
 فرض می کنیم A مجموعه ای متناهی با n عضو باشد. قرار می دهیم:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

می دانیم هر رابطه، زیر مجموعه ای از حاصل ضرب دکارتی $A \times A$

است و

$$A \times A = \{(a_1, a_1), \dots, (a_n, a_n), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)\}$$

برای پیدا کردن تعداد روابط منعکس روی A ، باید ببینیم، برای هر عضو $A \times A$ چند انتخاب وجود دارد. $A \times A$ را به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم A_1 و A_2 در نظر می گیریم:

$$A_1 = \{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow |A_1| = n$$

$$A_2 = \{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = |A \times A| - |A_1| = n^2 - n$$

با توجه به این که هدف، پیدا کردن تعداد روابط منعکس مثل R روی A است، طبق تعریف، رابطه منعکس هریک از اعضای A_1 (زوجهای مرتب با دو مؤلفه یکسان) حتماً باید عضو R باشند. پس برای هر عضو A_1 یک انتخاب وجود دارد.

برای هریک از اعضای A_2 (زوجهای مرتب با دو مؤلفه متفاوت) دو انتخاب وجود دارد (می تواند عضو رابطه R باشد یا نباشد).

بنابراین طبق اصل ضرب $2^{\frac{n^2 - n}{2}} \times 2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 - n}{2}}$ رابطه

منعکس روی مجموعه n عضوی A می توان نوشت.

تعریف: خاصیت تقارنی: گوئیم رابطه R روی مجموعه A خاصیت تقارنی دارد؛ هرگاه برای هر زوج مرتب مانند (x, y) که در R موجود است، (y, x) نیز در R موجود باشد.

می‌کنیم. ولی با توجه به این که هدف، نوشتن رابطه پادمتقارن است، برای هریک از $\frac{n^2-n}{2}$ زیرمجموعه $S_{ij} = \{(a_i, a_j), (a_j, a_i) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ در A_2 سه انتخاب وجود دارد (۱- ممکن است فقط $(a_i, a_j) \in R$ ، ۲- ممکن است فقط $(a_j, a_i) \in R$ ، ۳- ممکن است هیچ کدام عضو رابطه R نباشند).

و برای هریک از n عضو مجموعه A_1 ، ۲ انتخاب وجود دارد (یا عضو رابطه R هست و یا نیست).

لذا طبق اصل ضرب $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطه پاد متقارن، روی مجموعه n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط متقارن و پاد متقارن روی مجموعه n عضوی A

اگر R هم خاصیت تقارنی و هم پاد تقارنی داشته باشد، باید زیرمجموعه‌ای از رابطه همانی باشد و هرگاه R روی یک مجموعه n عضوی تعریف شده باشد، رابطه همانی (رابطه‌ای متشکل از تمام زوجهای مرتب $A \times A$ که هردو مؤلفه با هم برابر باشند) 2^n زیرمجموعه دارد. لذا تعداد چنین روابطی 2^n می‌باشد. تعریف: خاصیت تعدی (تراپایی، تراگذری): فرض کنیم رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد، اگر برای هر $x, y, z \in A$ که $(y, z) \in R$ و $(x, y) \in R$ ، بتوانیم ثابت کنیم $(x, z) \in A$. گوئیم R خاصیت تعدی دارد. مثل رابطه $\leq$ روی مجموعه اعداد حقیقی. تعریف: رابطه هم‌ارزی: رابطه هم‌ارزی R روی A ، رابطه‌ای است که هم انعکاسی، هم تقارنی و هم تعدی باشد.

تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعه m عضوی A در کتاب جبر و احتمال (نظام جدید) نشان داده شد که اگر $P = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ یک افراز برای مجموعه A باشد،

روابط منعکس و متقارن برابر است با: $2^{\frac{n^2-n}{2}} \times 2^n$.

تعریف: خاصیت پادمتقارن: فرض کنید، R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد ($R \subseteq A \times A$). رابطه R پاد متقارن نامیده می‌شود: هرگاه برای هر $a, b \in A$ ، اگر $(a, b) \in R$ و نیز $(b, a) \in R$ ، آن‌گاه $a = b$.

مثال ۱: هرگاه $A = \{1, 2\}$ ، رابطه $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ یک رابطه پاد متقارن روی A نیست؛ چون $(1, 2) \in R$ و نیز $(2, 1) \in R$ ولی $1 \neq 2$.

مثال ۲: برای مجموعه مفروض U ، رابطه R را روی $P(U)$ (مجموعه تمام زیر مجموعه‌های U) به صورت زیر در نظر بگیرید: برای هر $A, B \subseteq U$ و $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$. این رابطه، یک رابطه پاد متقارن است؛ زیرا اگر ARB و BRA ، آن‌گاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. لذا طبق تعریف تساوی مجموعه‌ها، خواهیم داشت: $A = B$.

توجه: «متقارن نیست» با «پاد متقارن است» هم معنا نیست (این موضوع در مثال زیر بررسی می‌شود).

مثال ۳: برای $A = \{1, 2, 3\}$ ، رابطه R را روی A چنین تعریف کنید: $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. این رابطه پادمتقارن نیست؛ چون $(1, 2) \in R$ و $(2, 1) \in R$ ولی $1 \neq 2$. متقارن هم نیست؛ چون $(2, 3) \in R$ ولی $(3, 2) \notin R$. یا رابطه $R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ روی A ، هم متقارن است و هم پادمتقارن. مسأله ۲: آیا رابطه عاد کردن روی مجموعه اعداد صحیح، پادمتقارن است؟

حل: خیر، چون برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ، $a \mid -a$ و $-a \mid a$ ولی $a \neq -a$ ($a \neq 0$).

تعیین تعداد روابط پاد متقارن روی مجموعه n عضوی A

با روشی مشابه تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل

$$۳) \{c\}_1, \{a, b\}_2, \{d\}_3$$

$$۴) \{c\}_1, \{d\}_2, \{a, b\}_3$$

$$۵) \{d\}_1, \{a, b\}_2, \{c\}_3$$

$$۶) \{d\}_1, \{c\}_2, \{a, b\}_3$$

(منظور از $\{c\}_3$ آن است که c در ظرف دوم قرار گرفته است).

حال اگر بین ظرفها تمایز قائل نشویم، این $۶ = ۳!$ توزیع

یکسان خواهند بود. بنابراین $۶ = \frac{۳۶}{۳!}$ راه برای توزیع ۴ شیء

تمایز بین ۳ ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، وجود دارد.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m, \quad m \geq n$$

روش برای توزیع m شیء مختلف در n ظرف شماره دار (که هیچ ۲ شماره ای همانند نیست)، بدون آن که ظرفی خالی بماند، وجود دارد.

اگر اعداد را از روی ظروف برداریم، ظروف به ظاهر مشابه خواهند بود و متوجه خواهیم شد هر توزیع داخل ظروف مشابه (غیر خالی)، با $n!$ از جنین توزیعهایی، داخل ظروف شماره دار متناظر است. لذا تعداد راههای ممکن برای توزیع m شیء متفاوت داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند،

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

عبارت است از $S(m, n)$ نشان داده می شود و عدد استرلینگ از نوع دوم نامیده می شود.*

مسأله ۱: به چند روش می توان ۴ شیء متمایز d و c و b و a در

۲ ظرف مشابه قرار داد؛ به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (به عبارت دیگر، تعداد افرازهای مجموعه ۴ عضوی $\{a, b, c, d\}$ به ۲ زیرمجموعه ناتهی را تعیین کنید).

حل: روش اول: استفاده از فرمول عدد استرلینگ، با قراردادن

$$m = 4 \text{ و } n = 2$$

$$S(4, 2) = \frac{1}{2!} \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{2-k} (2-k)^4 = \frac{1}{2!}$$

برای پیدا کردن تعداد روابط هم ارزی روی مجموعه m عضوی A، کافی است تعداد افرازهای مجموعه A را به دست آوریم.

تعیین تعداد راههای افراز یک مجموعه m عضوی به n زیرمجموعه ناتهی (تعداد راههای توزیع m شیء مختلف داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند).

هرگاه A و B دو مجموعه متناهی باشند که $|A| = m \geq n = |B|$ ، آن گاه تعداد توابع پوشای موجود از A به B، برابر است با:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n} n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \binom{n}{n-2} (n-2)^m - \dots \\ & + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \\ & = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \end{aligned}$$

(حالت خاص این موضوع، با انتخاب $n = 3$ و $m = 4$ در کتاب ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی، با استفاده از اصل طرد و شمول اثبات شده است.)

مثال: هرگاه $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ، تعداد توابع پوشا از مجموعه A به مجموعه B، با در نظر گرفتن $|A| = m = 4$ و $|B| = n = 3$ برابر است با:

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{3-k} (3-k)^4 = \binom{3}{3} 3^4 - \binom{3}{2} 2^4 + \binom{3}{1} 1^4$$

$$+ 0 = 36$$

به طور مشابه، برای توزیع ۴ شیء متمایز در ۳ ظرف متفاوت، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، ۳۶ راه وجود دارد. در بین این ۳۶ توزیع مجموعه های ۶ تایی می یابیم. به عنوان مثال، یکی از این مجموعه های ۶ تایی عبارت است از:

$$۱) \{a, b\}_1, \{c\}_2, \{d\}_3$$

$$۲) \{a, b\}_1, \{d\}_2, \{c\}_3$$

خالی ماندن ظروف باشیم، وجود دارد. به عبارت دیگر، تعداد افزایندهای مجموعه m عضوی به n زیر مجموعه نامرتب (بدون محدودیت) برابر است با $S(m, 1) + S(m, 2) + \dots + S(m, n)$

مسئله ۲: به چند روش می توان ۴ شیئ متمایز a, b, c و d را در ۳ ظرف مشابه قرار داد، به طوری که مجاز به خالی ماندن ظروف باشیم.

حل: ممکن است ۴ شیئ در یک ظرف یا در دو ظرف و یا در هر ۳ ظرف قرار بگیرند، لذا طبق اصل جمع:

$$= \text{تعداد توزیعهای ۴ شیئ متمایز در ۳ ظرف مشابه یا کمتر} \\ S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) = 1 + 7 + 6 = 14$$

$$\left(S(4, 3) = \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{3-k} (3-k)^4 = \frac{1}{3!} \left[\binom{3}{3} 3^4 - \binom{3}{2} 2^4 + \binom{3}{1} 1^4 - \binom{3}{0} 0^4 \right] \right. \\ \left. - \left[\binom{3}{2} 2^4 + \binom{3}{1} 1^4 + \binom{3}{0} 0^4 \right] = \frac{1}{6} (81 - 48 + 3) = 6 \right)$$

نکته ۲: تعداد کل راههای افزایندهای مجموعه m عضوی و نیز تعداد روابط هم ارزی روی مجموعه m عضوی، برابر است

$$\text{با: } S(m, 1) + S(m, 2) + \dots + S(m, m) = \sum_{i=1}^m S(m, i)$$

مسئله ۳: تعداد کل افزایندهای مجموعه ۴ عضوی $\{a, b, c, d\}$ را بیابید:

حل:

= تعداد افزایندهای مجموعه ۴ عضوی

$$\sum_{i=1}^4 S(4, i) = S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) \\ = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

و بالاخره مسئله ۴: تعداد روابط هم ارزی روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ را بیابید.

حل: تعداد روابط هم ارزی روی مجموعه A ، برابر است با تعداد افزایندهای مختلف مجموعه A ، لذا طبق مسئله ۳، جواب مسئله، ۱۵ می باشد.

مسئله ۵: هرگاه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، مشخص کنید تعداد

$$\left[\binom{2}{2} 2^4 - \binom{2}{1} 1^4 + 0 \right] = 7$$

روش دوم: در نظر گرفتن حالت‌های مختلف:

الف) یک عضو در یک مجموعه و سه عضو باقیمانده در

مجموعه دیگر که این توزیع به $\binom{4}{1} \binom{3}{3} = 4$ روش انجام می گیرد

و عبارت است از:

$$1) \{a\}, \{b, c, d\}$$

$$2) \{b\}, \{a, c, d\}$$

$$3) \{c\}, \{a, b, d\}$$

$$4) \{d\}, \{a, b, c\}$$

ب) دو عضو در یک مجموعه و دو عضو باقیمانده در مجموعه

دیگر که این توزیع به $\frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 3$ روش انجام می گیرد. (به این

ترتیب که ابتدا از بین ۴ عضو، ۲ عضو انتخاب کرده و سپس از ۲ عضو باقیمانده، ۲ عضو انتخاب می کنیم. طبق اصل ضرب

راه برای توزیع موجود است. منتهی با توجه به این که

$$1) \{a, c\}, \{b, d\}$$

به عنوان مثال، افزایندهای هر دو یک افزاینده

$$2) \{b, d\}, \{a, c\}$$

محسوب می شوند، حاصل را بر $2!$ (تعداد جایگشت‌های ۲ مجموعه دو عضوی تقسیم می کنیم). این سه افزاینده متمایز، عبارتند از:

$$1) \{a, b\}, \{c, d\}$$

$$2) \{a, c\}, \{b, d\}$$

$$3) \{b, c\}, \{a, d\}$$

با توجه به قسمت‌های الف و ب، و اصل جمع، خواهیم داشت:

$$S(4, 2) = 4 + 3 = 7$$

نکته ۱: به طور کلی برای $m \geq n$ ، $\sum_{i=1}^n S(m, i)$ روش برای

توزیع m شیئ متمایز داخل n ظرف مشابه، به طوری که مجاز به

روابط روی A را که :

$$((1,2), (2,1)), ((1,3), (3,1)), \dots, ((5,6), (6,5))$$

(تعداد: $\frac{6!-6}{1} = 15$) $\rightarrow 2 \times 2 \times \dots \times 2$ انتخاب

جواب: $2^6 \times 3^{15}$

جواب (ج): 2^6

جواب (ح): عبارت است از، $\{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$

جواب (خ): $\sum_{i=1}^6 S(6,i) = S(6,1) + S(6,2) + S(6,3)$

$+ S(6,4) + S(6,5) + S(6,6)$

رابطه هم ارزی $1+31+90+65+15+1=203$

روشهای محاسبه $S(6,i)$ ، $1 \leq i \leq 6$: روش اول (با استفاده

از فرمول عدد استرلینگ):

به عنوان مثال، روش محاسبه $S(6,3)$ با استفاده از فرمول عدد استرلینگ نوشته می شود:

$$S(6,3) = \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{3-k} (3-k)^6$$

یعنی تعداد افزایشهای

مجموعه ۶ عضوی، به ۳ زیرمجموعه ناتهی ۹۰ می باشد

$$= \frac{1}{3!} \left(3^6 - \binom{3}{2} 2^6 + \binom{3}{1} 1^6 + 0 \right) = \frac{729 - 192 + 3}{6} = 90$$

روش دوم (بدون استفاده از فرمول عدد استرلینگ):

$S(6,1): \{\square \square \square \square \square \square\} \Rightarrow S(6,1) = 1$

الف) $\{\square \square \square \square \square \square\}, \{\square\} \Rightarrow$

تعداد افزایشهای مجموعه ۶ عضوی، به ۲ $= \binom{6}{5} \binom{1}{1} = 6$
زیر مجموعه ۵ عضوی و یک عضوی

$S(6,2):$ ب) $\{\square \square \square \square \square\}, \{\square \square\} \Rightarrow$

تعداد افزایشهای مجموعه ۶ عضوی، به ۲ $= \binom{6}{4} \binom{2}{2} = 15$
زیر مجموعه ۴ عضوی و دو عضوی

ج) $\{\square \square \square\}, \{\square \square \square\} \Rightarrow$

تعداد افزایشهای مجموعه ۶ عضوی، به ۲ $= \frac{\binom{6}{3} \binom{3}{3}}{2!} = 10$
زیر مجموعه ۳ عضوی

یعنی تعداد افزایشهای مجموعه ۶ عضوی، به ۲ زیرمجموعه ناتهی،
۳۱ می باشد. $S(6,2) = 6 + 15 + 10 = 31$ طی اصل جمع الف و ب و ج

الف) منعکس هستند. ب) متقارن هستند.

ب) منعکس و متقارن هستند. ت) منعکس و شامل (۱ و ۲) هستند.

ث) متقارن و شامل (۱ و ۲) هستند. ج) پاد متقارن هستند.

ج) متقارن و پاد متقارن هستند.

ح) منعکس، متقارن و پاد متقارن هستند.

خ) منعکس، متقارن و متعدی (هم ارزی) هستند.

د) منعکس و متقارن، ولی غیر متعدی هستند.

ذ) هم ارزی هستند و دقیقاً ۲ کلاس هم ارزی را مشخص می کنند.

را هم ارزی هستند و $1 \in [2]$. ز) هم ارزی هستند و $1, 2 \in [4]$.

حل:

الف) $2^{6^2-6} = 2^{30}$

ب) $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^6 \times 2^{15} = 2^{21}$

پ) $1^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{15}$

ت) $A \times A = \left\{ \underbrace{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)}_{\text{انتخاب ۱ (تعداد: } 6 \times 1 \times \dots \times 1 \text{)}} , \underbrace{(1,2), (2,1), \dots, (6,5)}_{\text{انتخاب ۱ (تعداد: } 6 \times 1 \times \dots \times 1 \text{)}} \right\}$

$\left\{ \underbrace{(2,1), (1,3), (3,1), \dots, (5,6), (6,5)}_{\text{انتخاب ۲ (تعداد: } 2 \times 2 \times \dots \times 2 \text{)}} \right\}$
زوجهای مرتب با دو مؤلفه مساوی
تعداد کل اعضای $A \times A$

جواب: $1^6 \times 1 \times 2^{29} = 2^{29}$

ث) $A \times A = \left\{ \underbrace{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)}_{\text{انتخاب ۱ (تعداد: } 6 \times 2 \times \dots \times 2 \text{)}} , \underbrace{(1,2), (2,1), \dots, (5,6), (6,5)}_{\text{انتخاب ۱ (تعداد: } 6 \times 2 \times \dots \times 2 \text{)}} \right\}$

$\left\{ \underbrace{(1,3), (3,1), \dots, (5,6), (6,5)}_{\text{انتخاب ۲ (تعداد: } \frac{6^2-6}{2} = 14 \text{)}} \right\}$
تعداد زوجهای مرتبی که هر مؤلفه آنها نیز
یک زوج مرتب با مؤلفه های متفاوت است

جواب: $2^6 \times 1 \times 2^{14} = 2^{20}$

ج) $A \times A = \left\{ \underbrace{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)}_{\text{انتخاب ۲ (تعداد: } 6 \times 2 \times \dots \times 2 \text{)}} \right\}$

(۲) افرازهایی از A به صورت $\{\square, \square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1, 2, 4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 3$.

(۳) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1, 2, 4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!} = 1$.

(۴) افرازهایی از A به صورت $\{\square, \square\}$ و $\{1, 2, 4, \square\}$. تعداد

چنین افرازهایی برابر است با $\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 3$.

(۵) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1, 2, 4, \square\}$.

تعداد آنها برابر است با $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 3$.

(۶) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{1, 2, 4, \square, \square\}$. تعداد

آنها برابر است با $\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$.

(۷) افرازهایی از A به صورت $\{1, 2, 4, \square, \square, \square\}$. تعداد

آنها $\binom{3}{3} = 1$ می باشد که همان مجموعه A است.

جواب مسأله $1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 = 15$



$$\{\square \square \square \square\} \cdot \{\square\} \cdot \{\square\} \Rightarrow \frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 15$$

تعداد افرازهای مجموعه ۶ عضوی، به ۱ زیر مجموعه ۴ عضوی و ۲ زیر مجموعه یک عضوی

$$\{\square \square \square\} \cdot \{\square \square\} \cdot \{\square\} \Rightarrow S(6, 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{1!} = 60$$

تعداد افرازهای مجموعه ۶ عضوی، به ۱ زیر مجموعه ۳ عضوی و ۲ زیر مجموعه یک عضوی

$$\{\square \square\} \cdot \{\square \square\} \cdot \{\square \square\} \Rightarrow \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$$

زیر مجموعه ۲ عضوی

می دانیم: $n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

طبق تستهای مبرهنه $\Rightarrow$ جواب $2^{15} - 2^{10} = 32565$

جواب $S(6, 2) = 31$

را برای تعیین تعداد افرازهای A، به طوری که اعداد ۱ و ۲ در یک کلاس هم ارزی (زیر مجموعه A) موجود باشند، اعداد ۱ و ۲ را با هم یکی در نظر می گیریم و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعه ۵ عضوی را می یابیم که عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^5 S(5, i) = S(5, 1) + S(5, 2) + S(5, 3) + S(5, 4) + S(5, 5) = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$$

ز) کافی است اعداد ۱، ۲ و ۴ را یک عضو در نظر گرفته و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعه ۴ عضوی را بیابیم که برابر است با:

$$\sum_{i=1}^4 S(4, i) = S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

این ۱۵ افراز را می توان با روش زیر نیز به دست آورد.

(۱) افرازهایی از A به صورت $\{\square, \square, \square\}$ و $\{1, 2, 4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $\binom{3}{3} = 1$.