

تعمیم یافته اصل لانه کبوتر

بنابراین عدد پنجاهم به ناچار باید باقیمانده‌ای مشابه یکی از هفت عدد قبلی داشته باشد. در نتیجه، حداقل هشت عدد، هم باقیمانده خواهیم داشت.

برای آن که دستوری کلی برای حل این گونه مسائل داشته باشیم، فرض می‌کنیم، m کبوتر داریم و n لانه. بدیهی است که طبق الگوریتم تقسیم، از تقسیم m بر n خواهیم داشت:

$$m = nk + r \quad 0 \leq r < n$$

حال به روشی مشابه می‌توان گفت، اگر $1 \leq r < n$ ، حداقل $k+1$ کبوتر وارد یک لانه خواهند شد. اما روشن است که $k = \frac{m-r}{n}$ و چون به ازای هر $1 \leq r < n$ داریم:

$$\left\lceil \frac{m-r}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \quad ([] \text{ علامت جزء صحیح عدد است})$$

(چرا؟) بنابراین نتیجه کلی زیر را استنتاج می‌کنیم: هر گاه m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > n$ ، آن گاه حداقل

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$

به عنوان مثال، هر گاه ۲۰ کبوتر وارد شش لانه شوند،

$$\left\lfloor \frac{20-1}{6} \right\rfloor + 1 = 4$$

آن گاه حداقل ۴ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

حال به این مثال‌ها توجه کنید:

مثال ۲. نشان دهید، در مدرسه‌ای با ۱۲۰۰ دانش آموز حداقل ۴ دانش آموز پیدا می‌شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

حل. از اصل لانه کبوتر تعمیم یافته در حالت $m = ۱۲۰۰$

و $n = ۳۶۵$ استفاده می‌کنیم:

بسیاری از دانش آموزان دبیرستانی، با اصل لانه کبوتر و کاربردهای آن آشنایی دارند:

اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > n$ ، آن گاه حداقل در یکی از لانه‌ها، دو کبوتر یا بیش تر وارد می‌شوند.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش تر باشد، مسلماً نتیجه‌ای بیش از این که «حداقل دو کبوتر وارد یک لانه می‌شوند»، می‌تواند به دست آید.

به عنوان مثال فرض کنید، ۱۰ کبوتر وارد ۴ لانه می‌شوند.

به طور شهودی روشن است که در بدترین حالت، اگر کبوترها نخواهند وارد یک لانه شوند (یعنی تا حد امکان در لانه‌ها پخش شوند)، وقتی ۸ کبوتر وارد لانه‌ها می‌شوند، در هر لانه دو کبوتر بنابرین، کبوترهای نهم و دهم می‌توانند، وارد لانه‌هایی شوند که در آن‌ها قبلاً دو کبوتر وجود داشته‌اند.

یعنی حداقل در یکی از لانه‌ها سه کبوتر (یا بیش تر) وجود خواهد داشت. این همان تعمیم یافته اصل لانه کبوتر است.

مثال ۱. ۵۰ عدد طبیعی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، حداقل هشت تا از این عددها در تقسیم بر هفت، باقیمانده‌های یکسانی دارند.

برهان. باقیمانده‌های عددهای طبیعی در تقسیم بر هفت، یکی از هفت عدد متعلق به مجموعه

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

می‌نویسیم، در بدترین وضعیت، یعنی در صورتی که این عددها باقیمانده‌های متفاوتی داشته باشند، باید در تقسیم بر هفت، هفت تا از آن‌ها باقیمانده ۰، هفت تای دیگر باقیمانده ۱ و...

و هفت تای دیگر باقیمانده ۶ داشته باشند. به این ترتیب از ۴۹ عدد، هر هفت عدد یک نوع باقیمانده خواهد داشت.

برهان. باقیمانده‌های عددهای طبیعی در تقسیم بر هفت، یکی از هفت عدد متعلق به مجموعه

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

می‌نویسیم، در بدترین وضعیت، یعنی در صورتی که این عددها باقیمانده‌های متفاوتی داشته باشند، باید در تقسیم بر هفت، هفت تا از آن‌ها باقیمانده ۰، هفت تای دیگر باقیمانده ۱ و...

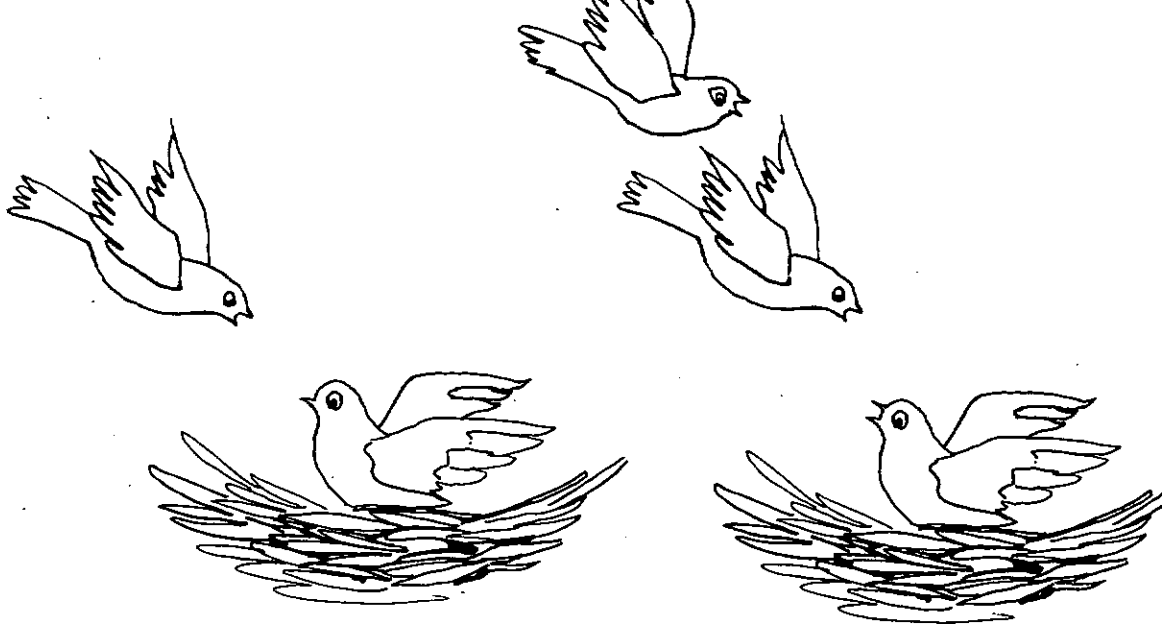
و هفت تای دیگر باقیمانده ۶ داشته باشند. به این ترتیب از ۴۹ عدد، هر هفت عدد یک نوع باقیمانده خواهد داشت.

برهان. باقیمانده‌های عددهای طبیعی در تقسیم بر هفت، یکی از هفت عدد متعلق به مجموعه

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

می‌نویسیم، در بدترین وضعیت، یعنی در صورتی که این عددها باقیمانده‌های متفاوتی داشته باشند، باید در تقسیم بر هفت، هفت تا از آن‌ها باقیمانده ۰، هفت تای دیگر باقیمانده ۱ و...

و هفت تای دیگر باقیمانده ۶ داشته باشند. به این ترتیب از ۴۹ عدد، هر هفت عدد یک نوع باقیمانده خواهد داشت.



۱۰ نقطه درون مثلث اصلی در نظر گرفته ایم. طبق تعمیم یافته اصل لانه کبوتر، حداقل سه نقطه درون یکی از مثلث های

کوچک قرار می گیرد: $(3 = \lfloor \frac{10-1}{4} \rfloor + 1)$ ؛ مانند نقاط A،

B و C در شکل. و چون فاصله هر دو نقطه از این نقاط، از طول ضلع مثلث MNP کوچک تر است، می توان نوشت:

$$AB + AC + BC < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1/2$$

تمرین

برای فعالیت بیش تر در این زمینه، تمرین های زیر را حل کنید:

۱. S یک مجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. ثابت کنید، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل ۴ عضو دارای یک باقیمانده اند.

۲. در یک دایره که مساحت آن برابر واحد است، ۱۳۸۱ نقطه به دلخواه در نظر گرفته ایم. ثابت کنید، دست کم یک مثلث پیدا می شود که رئوس آن سه نقطه از این نقاط و مساحت آن کم تر از ۰/۰۰۱۵ باشد.

۳. برای آن که در یک کلاس، دست کم سه دانش آموز در یکی از ماه های سال به دنیا آمده باشند، این کلاس حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد؟

۴. از یک کیسه که در آن مهره هایی به ۵ رنگ متفاوت وجود دارند، دست کم چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۵ مهره هم رنگ داریم؟

۵. در مربعی به ضلع واحد، ۲۸ نقطه را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. ثابت کنید چهار تا از این نقاط، رئوس یک

چهار ضلعی با محیط کم تر از $\frac{4}{3}$ هستند.

$$\left\lfloor \frac{1200-1}{365} \right\rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$$

بنابراین، حداقل چهار دانش آموز پیدا می شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

مثال ۳. از کیسه ای شامل تعداد زیادی مهره به رنگ های سفید، سیاه، قرمز و آبی حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم ۵ مهره هم رنگ داریم؟

حل. در این جا $n=4$ (تعداد لانه کبوترها که همان انواع رنگ ها است) و m مجهول است. ولی طبق فرض مسئله می توان نوشت:

$$1 + \left\lfloor \frac{m-1}{4} \right\rfloor = 5 \Rightarrow 4 \leq \frac{m-1}{4} < 5 \Rightarrow 16 \leq m-1 < 20 \Rightarrow 17 \leq m < 21$$

یعنی باید حداقل ۱۷ مهره از کیسه خارج کنیم. اگر ۲۱ مهره یا بیش تر خارج کنیم، می توانیم بگوییم حداقل شش مهره هم رنگ داریم (چرا؟)

مثال ۴. در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به طور تصادفی اختیار می کنیم. ثابت کنید، سه تا از این نقاط رئوس مثلثی با محیط کم تر از $1/5$ واحد هستند.

حل. مطابق شکل

مثلث را با وصل کردن

وسط های اضلاع آن به

یکدیگر، به چهار مثلث

متساوی الاضلاع به ضلع

$\frac{1}{2}$ تفکیک می کنیم. اکنون

