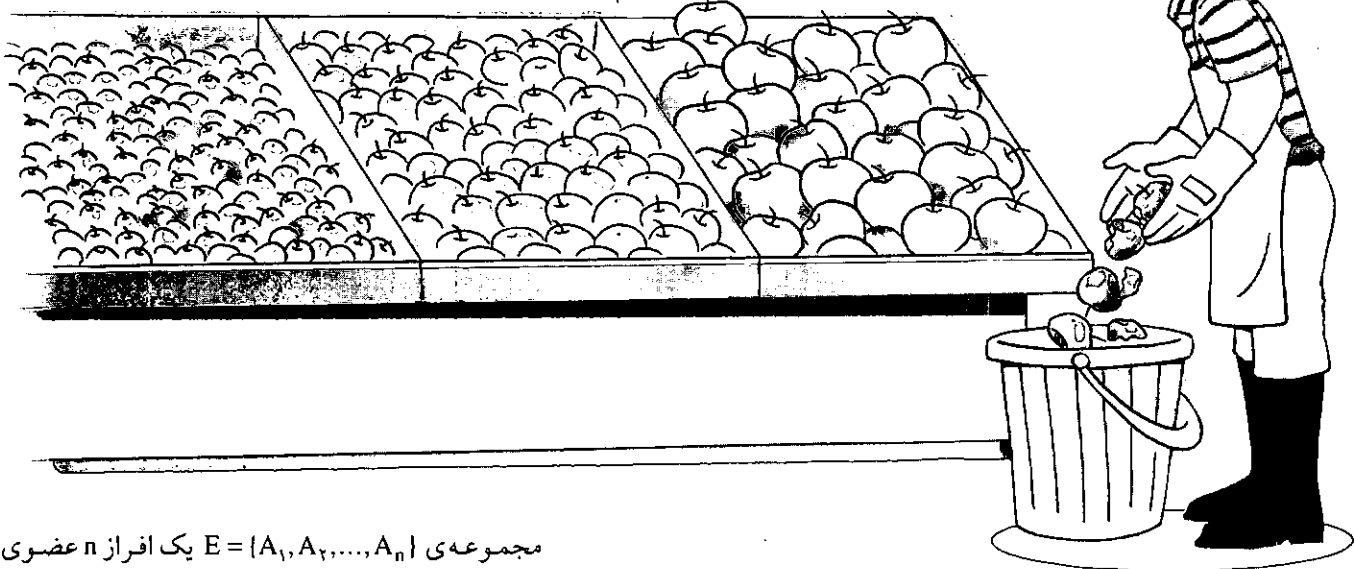


تعداد افرازهای

یک مجموعه Π عضوی

اشاره:

مقاله‌ی پیش رو، درباره‌ی راه‌های به دست آوردن تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی Π عضوی است. در پایان مقاله، راه نسبتاً ساده‌ای را به شما پیشنهاد می‌کنیم که سرعت محاسباتی آن از بقیه‌ی راه‌هایی که در این مقاله می‌آوریم، بیشتر است. هدف از این پیشنهاد، ارائه‌ی راهی ساده و سریع در محاسبات علم مجموعه‌ها و در باب افرازهاست. این مطلب قابل ذکر است که در این مقاله، از کلاس‌های هم‌ارزی و ارتباط آن با افرازها، مطلبی اثباتی و گفتنی موجود نیست.



مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی
برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

- ۱) $\forall i: 1 \leq i \leq n, A_i \neq \emptyset$
- ۲) $\forall i, j: 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ۳) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

برای درک بهتر مفهوم افراز یک مجموعه، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a\}$ را می‌نویسیم:
 $E = \{\{a\}\} \quad A: \boxed{a}$

مثال ۲. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b\}$ را می‌نویسیم:

$E = \{\{a\}, \{b\}\} \quad A: \boxed{a \quad b}$

$E = \{\{a, b\}\} \quad A: \boxed{a \quad b}$

افراز یک مجموعه

هرگاه A مجموعه‌ای ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند $A_1, A_2, \dots$ و A_n بیابیم، به قسمی که اولاً: هر یک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً: هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً: اجتماع این زیر مجموعه‌ها با خود مجموعه‌ی A برابر شود، در این صورت گوئیم: مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots$ و A_n مجموعه‌های افرازکننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

باید توجه داشته باشیم، در حالتی که $n = 1$ ، یعنی E یک افراز تک عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم، گوئیم:

آشنا شدیم. حال اگر مثال‌ها را ادامه دهیم و بتوانیم مجموعه‌های پنج‌عضوی و شش‌عضوی را نیز افراز کنیم، به جدولی مانند جدول ۱ دست خواهیم یافت.

جدول ۱. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \leq 6$)

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶
افراز n عضوی	۱	۱	۳	۷	۱۵	۳۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۳	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

در این جا مشکل این است که هرچه تعداد اعضای مجموعه‌ی افراز شده بیشتر شود، به دست آوردن تعداد کل افرازهای آن سخت‌تر می‌شود. از این رو در اکثر منابع، از رابطه‌ی زیر تعداد افرازهای m عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی را به دست می‌آورند:

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{m-k} (m-k)^n \quad m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$$

اثبات این رابطه از راه استقرا روی n است که از حوصله‌ی این بحث خارج است. حال با استفاده از رابطه‌ی بالا، جدول افرازی را بزرگ‌تر می‌کنیم:

جدول ۲. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \leq 9$)

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
افراز n عضوی	۱	۱	۳	۷	۱۵	۳۱	۶۳	۱۲۷	۲۵۵
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳	۸۷۷	۴۱۴۰	۲۱۱۴۷

مثال ۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را می‌نویسیم:

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}; A \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a\}, \{b, c\}\}; A \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{b\}, \{a, c\}\}; A \begin{bmatrix} b & a & c \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{c\}, \{a, b\}\}; A \begin{bmatrix} c & a & b \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a, b, c\}\}; A \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

مثال ۴. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را می‌نویسیم:

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

افراز سه‌عضوی که تعداد آن شش تا است و به سه‌تای آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

افراز دو‌عضوی که تعداد آن هفت عدد است، به چهار مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$E = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \{\{a, b, c, d\}\}; A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

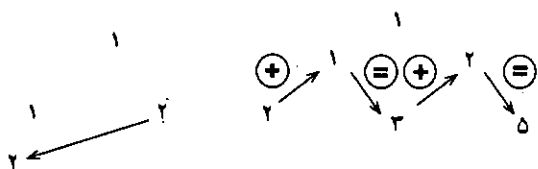
در مثال‌های بالا، به مفهوم افراز یک مجموعه دست یافتیم و با چگونگی افراز شدن یک مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی



حال می‌توان به شیوه‌ی عملکرد این مثلث دست یافت:
 «یک» به سطر دوم مثلث و ابتدای سطر آمده است. سپس با
 «یک» در بالای سر خود جمع شده و حاصل در آخر همان سطر
 نوشته شده است:



سپس «دو» به سطر پایین و سمت چپ سطر منتقل شده
 است، با عدد بالای سرش که «یک» باشد جمع شده و حاصل،
 یعنی «سه»، در وسط سطر نوشته شده است. سپس «سه» با
 «دو» در بالای سر خود جمع شده است و حاصل که «پنج»
 باشد، در انتهای سطر قرار گرفته است:

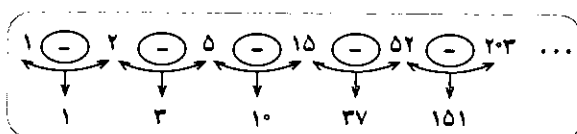


اگر همین روند را دنبال کنیم، به غیر از این که مثلث بالا را
 شکل داده‌ایم، به سادگی به جملات آتی دنباله‌ی افراز n عضوی
 دست می‌یابیم. رابطه‌ای که بر این مثلث حکم فرماست،

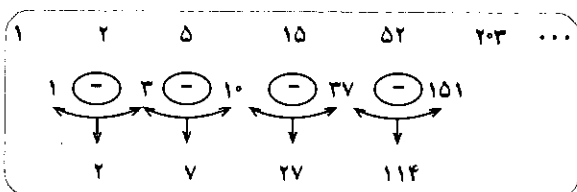
هنگامی که جدول ۲ را رسم می‌کنیم، به دنباله‌ای از مجموع
 کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی برمی‌خوریم که برای
 به دست آوردن جملات آتی آن، به محاسبات طولانی نیاز
 داریم. این دنباله به شکل زیر است:

۱-۲-۵-۱۵-۵۲-۲۰۳-۸۷۷-۴۱۴۰-...

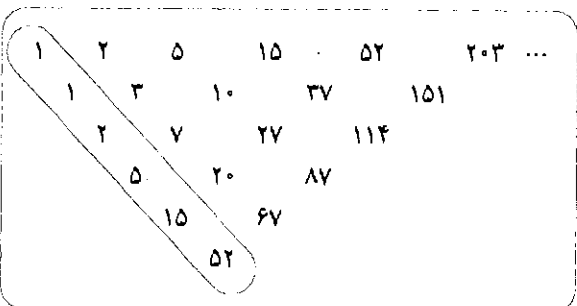
حال به راه‌حلی برای کم کردن این محاسبات توجه کنید:
 اگر دنباله‌ی مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی را
 که از حالا آن را دنباله‌ی افراز n عضوی می‌نامیم، بنویسیم و از
 هر دو جمله‌ی متوالی آن تفاضل بگیریم و زیر آن‌ها بنویسیم،
 دنباله‌ی جدیدی به صورت زیر به دست می‌آید:



اگر این عملیات را روی دنباله‌ی جدید انجام بدهیم، بار
 دیگر دنباله‌ی جدیدتری ایجاد کرده‌ایم:



و چندبار این عمل را انجام می‌دهیم تا به یک عدد برسیم که
 دیگر قادر به تفریق کردن آن نباشیم:



در این جا متوجه می‌شویم، ضلع مشخص شده از مثلث
 بالا، عیناً همان مجموع افرازهاست که دوباره تکرار شده
 است. اگر مثلث را کمی بچرخانیم، به راز آن پی خواهیم برد:

