

تصاعد عددی



با مجموعه اعداد صحیح مثبت که در واقع همان مجموعه اعداد طبیعی هستند و به صورت $Z^+ = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ نمایش داده می شود و دارای تعداد نامتناهی عضو است، آشنا هستید.

اگر عضوهای این مجموعه را از

داخل آکولاد خارج کنیم و آنها را با همان نظم و ترتیب خاصی که دارند، به صورت متوالی و به دنبال یکدیگر بنویسیم، خواهیم داشت:

1, 2, 3, 4, 5, ...

با اندکی دقت، درمی یابیم که اولین عضو، عدد یک است و بقیه اعضا به صورت:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 3 + 1$$

$$5 = 4 + 1$$

⋮

به دست می آیند؛ به عبارت دیگر، برای به دست آوردن هر عضو آتی، عضو قبل از آن را با عدد یک جمع می کنیم تا

عضو مورد نظر حاصل شود.

قرارداد ۱.

پس از این، به جای استفاده از کلمه «عضو» در بحث تصاعد، از کلمه «جمله» برای بیان مقصودمان استفاده می کنیم.

اکنون به اعداد زیر توجه می کنیم:

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, ...

به سهولت و با استفاده از شهود خود، درخواهیم یافت که جمله اول عدد ۳ و بقیه جمله ها حاصل جمع جمله قبل خود به اضافه عدد ثابت ۶ هستند. در ضمن، با مشاهده جمله های این دنباله، به این نتیجه می رسیم که جمله های این دنباله، در حال بزرگ شدن (از نظر اندازه عددی) و

به اصطلاح پیشروی و پیشرفت هستند؛ بنابراین همین توالی و فراگشت، بهانه خوبی ایجاد می کند تا این اعداد طبیعی، را «تصاعد^۲» بنامیم.

عدد ثابتی که در شکل گیری بقیه جمله ها در این تصاعد به واسطه عمل جمع، نقش اساسی را ایفا می کند، نام این تصاعد را «تصاعد عددی» قرار می دهیم.

قرارداد ۲.

در هر تصاعد عددی، مقدار ثابت و مخالف صفری را که در پیدایش جمله های آن تصاعد نقش دارد، «تفاضل مشترک»^۵ یا «قدر نسبت» می نامیم.

بنابراین با توجه به مطالب ارائه شده، اگر جمله اول یک تصاعد عددی را با x_0 و قدر نسبت آن را با r نمایش دهیم، در این صورت، شکل کلی تصاعد عددی به صورت زیر است:

$$x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, x_0 + 3r, \dots, x_0 + (n-1)r$$

می دانیم که اگر بخواهیم شناختی درباره موضوعی به دست آوریم، داشتن یک ضابطه که نشان دهنده قانونمندی در آن موضوع است، می تواند کمک بسیار ارزنده ای را در مورد آشکار سازی مشخصه های پنهان در آن موضوع به ما عرضه کند؛ لذا در این قسمت، سعی بر این است که ضابطه ای را با عنوان «رابطه بازگشت»^۶ در تصاعد عددی مطرح کنیم.

در واقع رابطه بازگشت، یک معادله برای دنباله ای از اعداد طبیعی مانند x_n است که می توانیم هر جمله از این دنباله را بر حسب تعدادی یا پایان (متناهی) از جمله های قبل بیان و مشخص کنیم؛ بنابراین روابط زیر را عرضه می کنیم:

$$I) x_n - x_{n-1} = r$$

$$II) x_n = x_{n-1} + r$$

$$III) x_{n-1} = x_n - r$$

با توجه به سه رابطه بازگشت بالا که هر کدام از دیگری نتیجه

می شود، می توان با داشتن یک جمله و قدر نسبت یک تصاعد عددی، بقیه جمله های آن را به دست آورد؛ بدین صورت که اگر قدر نسبت را به جمله ای مفروض اضافه کنیم و این عمل را مرتب ادامه دهیم، جمله های بعدی تصاعد عددی مشخص می شوند؛ و اگر قدر نسبت را از جمله ای مفروض کم کنیم و این عمل را به طور متوالی انجام دهیم، جمله های قبلی جمله ی مفروض تصاعد عددی معین می شوند.

لذا با توجه به مطالب گفته شده، درخواستیم یافت که در یک تصاعد عددی با جمله اول x_0 و قدر نسبت r ، جمله عمومی به صورت $x_n = x_0 + (n-1)r$ است.

مثال. اگر در یک تصاعد عددی، جمله اول 10 و قدر نسبت $r=5$ باشد، پس جمله عمومی این تصاعد به صورت $x_n = 10 + 5(n-1)$ است، اکنون اگر هر جمله این تصاعد را بخواهیم، می توانیم با انتخاب یک $n \in \mathbb{N}$ دلخواه، جمله مورد نظر خود را به دست آوریم. به عنوان مثال، اگر $n=3$ را اختیار کنیم، جمله سوم در این تصاعد، به صورت زیر حاصل می شود:

$$x_3 = 10 + 5(3-1) = 20$$

مثال. چند جمله از جمله های یک تصاعد عددی، به صورت $2, 4, 6, 8, \dots, 42, 44$ است؛ بنابراین مجموع سه جمله بعد از جمله چهارم در این تصاعد، برابر با 36 است؛ زیرا:

$$10 = 8 + 2 = \text{جمله پنجم}$$

$$12 = 10 + 2 = \text{جمله ششم}$$

$$14 = 12 + 2 = \text{جمله هفتم}$$

همچنین، مجموع سه جمله قبل از جمله ماقبل آخر، یعنی

$$42, \text{ برابر با } 114 \text{ است؛ زیرا:}$$

$$40 = 42 - 2 = \text{جمله بیست و یکم}$$

$$38 = 40 - 2 = \text{جمله بیستم}$$

$$36 = 38 - 2 = \text{جمله نوزدهم}$$

واسطه عددی

قضیه: اگر z, y, x سه جمله متوالی از یک تصاعد عددی باشند، آن گاه $y = \frac{x+z}{2}$ را واسطه این تصاعد عددی می نامیم.

برهان

بنابر آن چه در محتوای متن ارائه شد، داریم
 $z = x_n + 2r$ ، $y = x_n + r$ ، $x = x_n$

$$\begin{aligned} y = x_n + r &\Rightarrow 2y = 2(x_n + r) \\ &= 2x_n + 2r \\ &= x_n + x_n + 2r \\ &= x_n + (x_n + 2r) \\ &= x + z \Rightarrow y = \frac{x+z}{2} \end{aligned}$$

مثال. سه عدد $2x+1$ ، $2(x-2)$ ، $3x+3$ به ترتیب جمله های یک تصاعد عددی هستند، لذا با توجه به قضیه بالا، می توان چنین نوشت: $(3x+3) + (2x+1) = (2x-4) + 2(2x-4)$ ، و x را محاسبه کرد که، مقدار x برابر با -12 است. لذا جمله های این تصاعد عددی، با قدر نسبت $r = -5$ به صورت زیر است.

$$-2 \text{ و } -8 \text{ و } -13 \text{ و } -18 \text{ و } -23 \text{ و } -28 \text{ و } -33 \text{ و } -38 \text{ و } -43 \text{ و } \dots$$

مثال. سه عدد $7x^2 - 4$ ، $9x^2 - 1$ ، $4x^2 - 1$ به ازای $x > 0$ ، به ترتیب جمله های یک تصاعد عددی هستند، بنابرین، می توان نوشت $7x^2 - 1 = (4x^2 - 1) + 2(9x^2 - 4)$ ، که پس از محاسبه و ساده کردن، مقدار x برابر با یک است. بنابرین جمله های این تصاعد عددی با قدر نسبت $r = 2$ به صورت زیر است:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots$$

تصاعد عددی یکنوا

به دنباله اعداد زیر که یک تصاعد عددی را تشکیل می دهند، دقت کنید.

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots$$

جمله های این تصاعد در حال بزرگ شدن است؛ دلیل آن

چيست؟ دليل آن قدر نسبت اين تصاعد، عدد 4 است که صعودی بودن این تصاعد را نشان می دهد.
 اکنون به دنباله دیگری از اعداد که بیانگر یک تصاعد عددی است، توجه کنید:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

هنگامی که به جمله های این تصاعد عددی دقت می کنیم، این مطلب به ذهن ما می رسد که جمله های این تصاعد در حال کوچک شدن است. اگر دلیل آن را بررسی کنیم، متوجه می شویم که علت آن، قدرنسبت این تصاعد عددی، یعنی عدد -3 است که نزولی بودن این تصاعد است.

به طور کلی در یک تصاعد عددی، اگر قدرنسبت تصاعد عددی مثبت باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی صعودی می نامیم، که در آن، همواره $x_n < x_{n+1}$ برقرار است. به طور کلی تصاعد عددی صعودی یا نزولی را تصاعد عددی یکنوا می گویم.

اگر قدرنسبت تصاعد عددی منفی باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی نزولی می نامیم که در آن همواره $x_n > x_{n+1}$ برقرار است.

مثال. دنباله «اعداد طبیعی زوج» که با جمله عمومی $x_n = 2n$ معرفی می شوند را، در نظر بگیرید، برای این دنباله به ازای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$$

بنابرین دنباله اعداد طبیعی زوج یک «تصاعد عددی صعودی» با جمله اول $x_0 = 2$ و قدر نسبت $r = 2$ است.

مثال. دنباله اعداد صحیح منفی را که با جمله عمومی $x_n = -n$ معرفی می شوند را مدنظر بگیرید. برای این دنباله به ازای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, \dots$$

بنابرین دنباله اعداد صحیح منفی یک «تصاعد عددی نزولی» با جمله $x_0 = -1$ و قدرنسبت $r = -1$ را تشکیل می دهد.

تصاعد عددی باپایان^{۱۰} (متناهی)

اگر جمله آخر یک تصاعد عددی مشخص باشد، آن

تصاعد عددی را متناهی می‌نامیم.

در واقع در این چنین تصاعدهایی، جمله آخر به طور کامل مشخص است که ما آن را با L نمایش می‌دهیم؛ لذا شکل کلی یک تصاعد عددی با پایان (متناهی) با جمله اول x_0 و قدر نسبت r و جمله آخر a به صورت زیر است:

$$x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, \dots, L - 2r, L - r, L$$

مثال. هر یک از تصاعدهای زیر، بیانگر یک تصاعد عددی متناهی هستند.

(الف) $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 17, 18, 19, 20$

(ب) $-4, -5, -6, \dots, -15, -16, -17$

(ج) $6, 5, 4, \dots, -4, -5, -6$

مثال. تعداد جمله‌های تصاعد عددی متناهی $1, 3, 5, \dots, 29, 31$ برابر با ۱۶ است؛ زیرا در این تصاعد عددی متناهی، جمله اول $x_0 = 1$ ، قدر نسبت $r = 2$ و جمله آخر $L = 31$ است؛ لذا بنابر مطلب ارائه شده فوق داریم:

$$31 = 1 + (n-1)(2) \Rightarrow n = 16$$

ارائه چند قضیه برای تصاعد عددی با پایان (متناهی)

«کارل فردریش گاوس» (۱۸۵۵-۱۷۷۷) ریاضیدان شهیر آلمانی، هنگامی که تحصیلات خود را در دبستان سپری می‌کرد، در پاسخ به سؤالی که معلم در کلاس مطرح کرده بود، روشی را ارائه کرد که باعث حیرت بسیار فراوان معلم خویش و همکلاسی‌هایش شد.

معلم گاوس به عنوان تمرین، از شاگردان کلاس خواسته بود که مجموع جمله‌های تصاعد عددی متناهی زیر را به دست آورند:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 95, 96, 97, 98, 99, 100$$

اگر از حرف S که از ابتدای کلمه Sum و به معنای جمع است، استفاده کنیم، در واقع آن چیزی که مدنظر معلم کلاس بوده، عبارت است از:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

محاسبه این جمع، وقت نسبتاً زیادی را لازم داشت و معلم که خود از قبل جواب را محاسبه کرده بود، با این کار در واقع می‌خواست که شاگردان کلاس، مشغول به حل این سؤال شوند و از بازیگوشی پرهیز کنند که ناگهان متوجه شدند شاگردی (گاوس) جواب سؤال را پاسخ داد.

گاوس روش خارق العاده خود را به صورت زیر ارائه کرد. گاوس مجموع اعداد را S نامید و این اعداد را یک مرتبه از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) نوشت و با هم جمع کرد و بار دیگر این اعداد را از بزرگ به کوچک (از راست به چپ) و زیر همان اعداد مرتبه اول نوشت و با هم جمع کرد که چنین شد:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

سپس گاوس طرفین دو تساوی بالا را با هم جمع کرد؛ لذا:

$$2S = (1+100) + (2+99) + (3+98) + (4+97) + \dots$$

$$(97+4) + (98+3) + (99+2) + (100+1)$$

گاوس خوب می‌دانست که حاصل جمع داخل هر پرانتز، برابر با ۱۰۱ است و از طرفی تعداد جمله‌های تصاعد عددی متناهی که معلم مطرح کرده بود، برابر با ۱۰۰ بود؛ بنابراین:

$$2S = (101)(100) \Rightarrow S = 5050$$

قضیه ۱.

در تصاعد عددی متناهی با جمله اول x_0 ، قدر نسبت r و جمله آخر L مجموع جمله‌های آن که با S_n نمایش داده می‌شود، برابر است با $S_n = \frac{n}{2}(x_0 + L)$.

برهان

صورت کلی یک تصاعد عددی متناهی، به صورت زیر است:

$$x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, \dots, L - 2r, L - r, L$$

بنابراین با استفاده از روش گاوس، مجموع جمله‌های آن به صورت زیر است:

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \dots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

برای ادامه کار نیز از روش گاوس استفاده می‌کنیم.

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \dots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

$$S_n = L + (L - r) + (L - 2r) + \dots + (x_0 + 2r) + (x_0 + r) + x_0$$

اکنون از جمع طرفین دو تساوی بالا داریم:

$$2S_n = (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L) + \dots$$

$$+ (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L)$$

چون می‌دانیم که تعداد جمله‌های این تصاعد عددی متناهی برابر با n است؛ بنابراین:

$$2S_n = n(x_0 + L) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(x_0 + L)$$

از طرفی چون جمله عمومی در تصاعد عددی متناهی به صورت $L = x_0 + (n-1)r$ است، پس می‌توان مجموع جمله‌های تصاعد عددی متناهی را به صورت $S_n = \frac{n}{2}[2x_0 + (n-1)r]$ نیز مطرح کرد.

مثال. مجموع بیست جمله تصاعد عددی $1, 11, 19, 28, \dots$ است؛ زیرا:

$$S_n = \frac{20}{2}[2(1) + (20-1)(9)] = 1790$$

قضیه ۲

اگر S_n مجموع جمله‌های تصاعد عددی متناهی با جمله عمومی x_n باشد، آن گاه:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

برهان

می‌دانیم

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \quad (I)$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} \quad (II)$$

اکنون اگر تساوی (II) را از تساوی (I) کم کنیم، داریم:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

قضیه ۳

اگر S_n مجموع جمله‌های یک تصاعد عددی متناهی با جمله عمومی x_n و قدر نسبت r باشد، آن گاه:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

برهان

می‌دانیم:

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1}$$

$$S_{n-2} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2}$$

از طرفی چون $r = x_n - x_{n-1}$ و طبق قضیه ۲ داریم:

$$x_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$$

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

آزمون. در یک تصاعد عددی، جمله اول برابر ۷ و جمله ششم برابر ۲۷ است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

$$x_n = x_0 + (n-1)r \Rightarrow 27 = 7 + 5r \Rightarrow r = 4$$

آزمون. در یک تصاعد عددی با جمله‌های فرد، قدر نسبت این تصاعد عددی کدام است؟

$$1(1) \text{ صفر} \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است؛ زیرا ۷ همواره عددی مخالف صفر و $r = x_n - x_{n-1}$ است.

آزمون. در یک تصاعد عددی، مجموع n جمله اول برابر ۱۶۵، مجموع $n-1$ جمله اول برابر ۱۳۵ و مجموع $n-2$ جمله اول برابر ۱۰۸ است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

$$r = r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} \Rightarrow r = 165 - 2(135) + 108 \Rightarrow r = 2$$