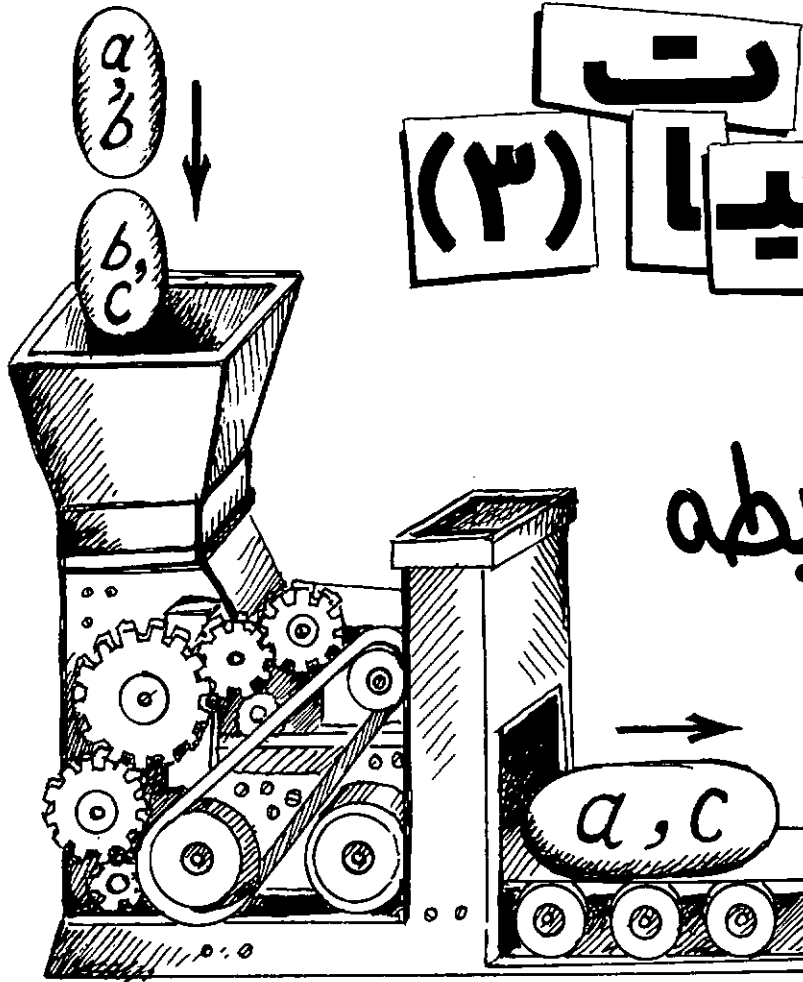


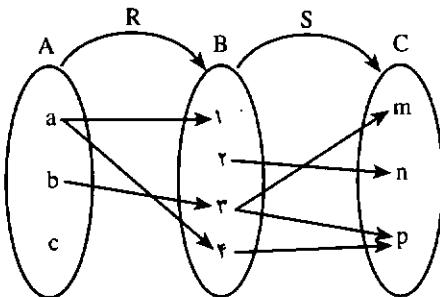
درک پیکان

ترکیب دو رابطه

● میرشهرام صدر



حل: برای درک بهتر حل مسئله، ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس ROS را به کمک آن مشخص می‌کنیم.



$$aR4, 4Sp \Rightarrow a(ROS)p$$

$$bR3, 3Sm \Rightarrow b(ROS)m$$

$$bR3, 3Sp \Rightarrow b(ROS)p$$

$$ROS = \{(a, p), (b, m), (b, p)\}$$

در نتیجه داریم:

فرض کنیم R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطه مرکب ROS را از A به C، به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که اگر $x(ROS)z$ ، آن گاه $y \in B$ موجود باشد؛ به طوری که xRy و ySz یعنی داریم:

$$ROS = \{(x, z) \mid (x, y) \in R, (y, z) \in S \text{ به طوری که } y \in B \text{ باشد}\}$$

تذکر مهم: برای نوشتن رابطه ROS ابتدا زوج‌های مرتب رابطه R، سپس زوج‌های مرتب رابطه S را در نظر می‌گیریم، این درست بعکس عملی است که در حسابان (بخش توابع) روی ترکیب دو تابع انجام می‌دهیم.

مثال: مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $C = \{m, n, p\}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $R = \{(a, 1), (b, 3), (a, 4)\}$ رابطه‌ای از A در B و $S = \{(4, p), (3, m), (2, n), (3, p)\}$ رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطه مرکب ROS را مشخص کنید.

قضیه (۱): اگر A, B و C سه مجموعه به ترتیب دارای m, n و k عضو باشند و R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد و $M_R = [a_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [b_{ij}]_{m \times k}$ به ترتیب ماتریس‌های متناظر با R و S باشند، ثابت کنید: $M_{ROS} = M_R \times M_S$

برهان: فرض کنیم درایه i زام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ باشد؛ یعنی: $i \in ROS$ در این صورت عضو r مانند $r \in B$ موجود است؛ به طوری که iRr و rSz ؛ یعنی: $a_{ir} = 1$ و $b_{rj} = 1$ پس $a_{ir} \odot b_{rj} = 1$ بنابراین یکی از جمع‌وندهای درایه i زام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است، در نتیجه درایه i زام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است. بعکس فرض کنیم درایه i زام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر ۱ باشد، در این صورت داریم:

$$a_{i1} \odot b_{1j} + a_{i2} \odot b_{2j} + \dots + a_{im} \odot b_{mj} = 1$$

بنابراین حداقل یک $1 \leq r \leq m$ موجود است؛ به طوری که $a_{ir} \odot b_{rj} = 1$ پس $a_{ir} = 1$ و $b_{rj} = 1$ ؛ یعنی: iRr و rSz ، بنابراین $i \in ROS$ در نتیجه درایه i زام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ است.

ترکیب رابطه R با خودش (ROR)

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، ترکیب رابطه R با خودش روی مجموعه A همواره قابل تعریف است و آن را با نماد ROR نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$a(ROR)b$ هر گاه وجود داشته باشد $C \in A$ ؛ به طوری که aRc و cRb ، یعنی داریم:

$$ROR = \{(a, b) \mid (a, c) \in R, (c, b) \in R \text{ به طوری که } c \in A\}$$

تذکر: رابطه ROR را می‌توان با نماد R^2 نمایش داد.

تعمیم: فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه A باشد؛ در این صورت می‌توان رابطه R^2 را روی A به صورت $R^2 = R^2 OR = (ROR)OR$ محاسبه کرد. به همین ترتیب، برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه R^n روی A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R^n = R^{n-1} OR$$

مثال: فرض کنیم $A = \{a, b, c, d\}$ و $R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, b)\}$ رابطه‌ای روی A باشد، رابطه‌های ROR و R^2 را مشخص کنید.

ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم:

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ و $C = \{x, y, z\}$ رابطه R را از A به B و رابطه S را از B به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

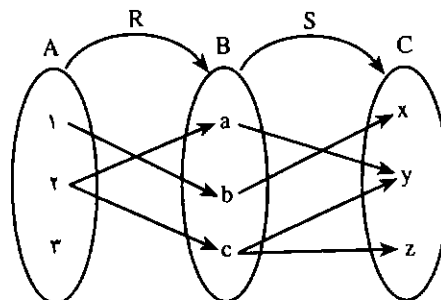
$$R = \{(1, b), (2, a), (2, c)\}$$

$$S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$$

الف) رابطه مرکب ROS را بنویسید.

ب) ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R ، S و ROS یعنی M_R ، M_S و M_{ROS} را مشخص و سپس M_{ROS} را با $M_R \times M_S$ مقایسه کنید. $(M_R \times M_S)$ ضرب دو ماتریس با استفاده از اعمال بولی است.

حل: الف) ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس به کمک آن، رابطه ROS را مشخص می‌کنیم.



$$1Rb, bSx \Rightarrow 1(ROS)x$$

$$2Ra, aSy \Rightarrow 2(ROS)y$$

$$2Rc, cSy \Rightarrow 2(ROS)y$$

$$2Rc, cSz \Rightarrow 2(ROS)z$$

در نتیجه داریم:

$$ROS = \{(1, x), (2, y), (2, z)\}$$

ب) با استفاده از رابطه‌های R ، S و ROS ، ماتریس‌های متناظر با آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; M_{ROS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون به کمک اعمال بولی $M_R \times M_S$ را محاسبه می‌کنیم:

$$M_R \times M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با مقایسه M_{ROS} و $M_R \times M_S$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$M_{ROS} = M_R \times M_S$$

مثال: فرض کنید $A = \{۲, ۳, ۴\}$ و $R = \{(a, b) | a, b \in A, (a, b) = ۱\}$ رابطه‌ای روی A باشد،

(الف) رابطه ROR را مشخص کنید.

(ب) M_{ROR} و $(M_R)^T$ را مشخص کنید، سپس آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: (الف) ابتدا رابطه R را مشخص می‌کنیم. منظور از $(a, b) = ۱$ ، یعنی این که بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابر با ۱ است؛ در این حالت، می‌گوییم دو عدد a و b نسبت به هم اولند یا متباین هستند:

$$R = \{(۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۴), (۴, ۲)\}$$

با توجه به تعریف رابطه ROR داریم:

$$ROR = \{(۲, ۲), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۴, ۴)\}$$

$$M_{ROR} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$(M_R)^T$ را با استفاده از اعمال بولی محاسبه می‌کنیم:

$$(M_R)^T = M_R \times M_R = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با مقایسه M_{ROR} و $(M_R)^T$ ملاحظه می‌کنیم که $M_{ROR} = (M_R)^T$.

قضیه (۲): هرگاه R یک رابطه روی مجموعه n عضوی A

باشد و M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد، ثابت کنید:

(الف) $M_R = [۰]_{n \times n}$ اگر و تنها اگر $R = \emptyset$

(ب) $M_R = [۱]_{n \times n}$ اگر و تنها اگر $R = A \times A$

(ج) $M_{ROR} = (M_R)^T$

برهان: (الف) فرض کنیم $M_R = [۰]_{n \times n}$ ، در نتیجه برای هر

$a, b \in A$ داریم: aRb ؛ بنابراین $R = \emptyset$.

بعکس: فرض کنیم $R = \emptyset$ ، در نتیجه برای هر $a, b \in A$

داریم: aRb ، پس همه درایه‌های ماتریس M_R برابر صفر

هستند؛ بنابراین $M_R = [۰]_{n \times n}$.

(ب) فرض کنیم $M_R = [۱]_{n \times n}$ ، در نتیجه برای هر $a, b \in A$

داریم: aRb ؛ پس $R = A \times A$.

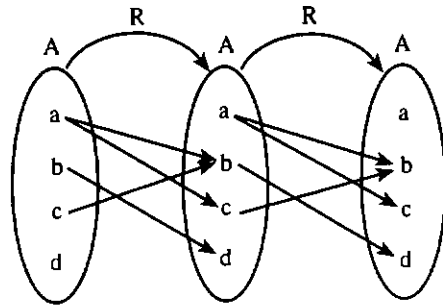
بعکس: فرض کنیم $R = A \times A$ ، در نتیجه برای هر $a, b \in A$

داریم: aRb پس همگی درایه‌های ماتریس M_R برابر ۱ است؛

بنابراین $M_R = [۱]_{n \times n}$.

(ج) با فرض $M_R = M_S$ در قضیه (۱)، برهان را به عهده

خواننده واگذار می‌کنیم.



$$aRb, bRd \Rightarrow a(ROR)d$$

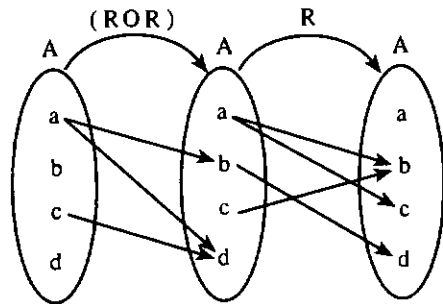
$$aRc, cRb \Rightarrow a(ROR)b$$

$$cRb, bRd \Rightarrow c(ROR)d$$

در نتیجه داریم:

$$ROR = \{(a, d), (a, b), (c, d)\}$$

برای محاسبه رابطه $ROROR = (ROR)OR$ از برابری $ROROR = (ROR)OR$ استفاده می‌کنیم.



$$a(ROR)b, bRd \Rightarrow a((ROR)OR)d$$

در نتیجه داریم:

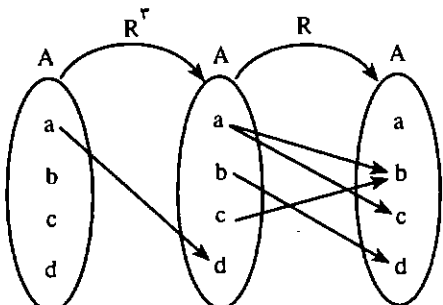
$$ROROR = (ROR)OR = R^T = \{(a, d)\}$$

مثال: در مثال قبل، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $n \geq ۴$

رابطه R^n برابر با مجموعه تهی است. برای مثال، برای $n = ۴$

خواهیم داشت:

$$R^4 = R^T OR$$



با توجه به نمودار بالا ملاحظه می‌کنیم که $R^4 = \emptyset$.

$$(M_R)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M_{ROR}$$

در نتیجه داریم:

$$ROR = \{(1, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$$

اکنون برای محاسبه R^2 از رابطه $M_{R^2} = (M_R)^2$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^2} = M_{R^2} \times M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$R^2 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

برای محاسبه R^3 از رابطه $M_{R^3} = (M_R)^3$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^3} = M_{R^3} \times M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R$$

ملاحظه می‌کنیم که $M_{R^3} = M_R$ ، بنابراین داریم:

$$R^3 = R = \{(1, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

برای محاسبه R^4 از رابطه $R^4 = R$ استفاده می‌کنیم:

$$R^4 = R^4 \text{ OR } = (R^3 \text{ OR } R^3) \text{ OR } = (ROR) \text{ OR } = R^2$$

در نتیجه داریم:

$$R^4 = R^2 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

قضیه (۳): فرض کنیم A, B, C و D چهار مجموعه

باشند، R رابطه‌ای از A در B ، S رابطه‌ای از B در C و T رابطه‌ای از C در D باشد؛ ثابت کنید عمل ترکیب رابطه‌ها به صورت زیر خاصیت شرکت‌پذیری دارد:

$$(ROS)OT = RO(SOT)$$

برهان: برای اثبات برابری حکم، ثابت می‌کنیم که

$$(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$$

$$RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$$

فرض کنیم $(a, d) \in (ROS)OT$ ، بنابراین $c \in C$ ای

نتیجه: فرض کنیم A یک مجموعه‌ای n عضوی و R رابطه‌ای روی A باشد. M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد؛ در این صورت، برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم: $M_{R^m} = (M_R)^m$ ؛ یعنی:

$$M_{\underbrace{ROR \dots OR}_m} = (M_R)^m$$

برهان: با استفاده از اصل استقرای ریاضی روی m داریم:

$$m = 1 : M_{R^1} = (M_R)^1 \Rightarrow M_R = M_R$$

$$m = k : M_{R^k} = (M_R)^k$$

$$m = k + 1 : M_{R^{k+1}} = (M_R)^{k+1}$$

می‌دانیم $R^{k+1} = R^k \text{ OR } R$ و در قضیه (۱) ملاحظه کردیم که $M_{ROS} = M_R \times M_S$ ؛ بنابراین:

$$M_{R^{k+1}} = M_{R^k \text{ OR } R} = M_{R^k} \times M_R$$

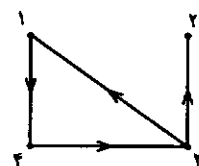
$$= (M_R)^k \times M_R \quad (\text{طبق فرض استقرا})$$

$$= (M_R)^{k+1}$$

در نتیجه، حکم برای هر $m \in \mathbb{N}$ برقرار است.

تذکر: فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعه n عضوی A باشد، برای محاسبه رابطه ROR (یا R^2) بهتر است ابتدا ماتریس $(M_R)^2$ (یا $(M_R)^m$) را با استفاده از اعمال بولی محاسبه کنیم، سپس با استفاده از برابری $M_{ROR} = (M_R)^2$ (یا $M_{R^m} = (M_R)^m$) آن رابطه را بنویسیم.

مثال: گراف جهت‌دار زیر، متناظر با رابطه R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ است. رابطه‌های R^2 ، R^3 و R^4 را مشخص کنید.



حل: ابتدا رابطه متناظر با گراف جهت‌دار را می‌نویسیم:

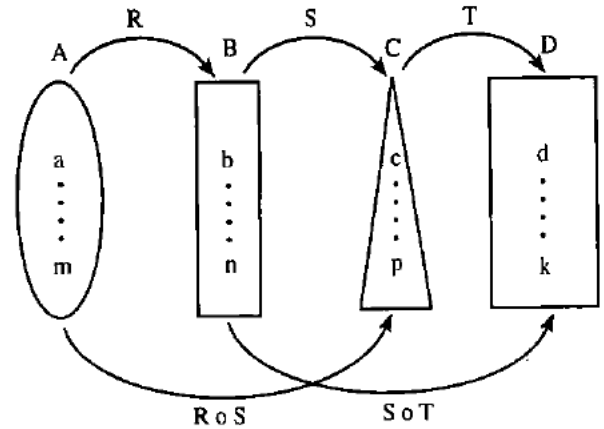
$$R = \{(1, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

سپس متناظر با رابطه R ، ماتریس M_R را می‌نویسیم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه رابطه ROR از رابطه $M_{ROR} = (M_R)^2$ استفاده می‌کنیم:

از این که $(b, c) \in S$ و $(c, d) \in T$ نتیجه می‌گیریم که $(a, b) \in R$ و چون $(a, b) \in R$ در نتیجه داریم:
 $(a, d) \in RO(SOT)$ ؛ بنابراین $(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$ به همین ترتیب، به‌طور مشابه با عضوگیری می‌توان ثابت کرد که $RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$. در نتیجه: $(ROS)OT = RO(SOT)$.
 برای بررسی دقیق‌تر خواص رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های ۰ و ۱؛ علاوه بر اعمال بولی، نیاز به معرفی چند تعریف داریم، تا به کمک این تعریف‌ها، قضیه‌هایی را مطرح کنیم.



موجود است؛ به‌طوری‌که $(a, c) \in (ROS)$ و $(c, d) \in T$ چون $(a, c) \in (ROS)$ ، بنابراین $b \in B$ ای موجود است؛ به‌طوری‌که $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in S$.