

گراف جهتدار نامیده می‌شود و آن را با نماد  $G = (V, E)$  نمایش می‌دهیم. در این گراف،  $V$  مجموعه رأس‌ها و  $E$  مجموعه یال‌هاست.

چون در حالت کلی  $(a, b)$  با  $(b, a)$  برابر نیست؛ بنابراین جهتدار بودن گراف، از تعریف زوج مرتب به دست می‌آید و داریم:

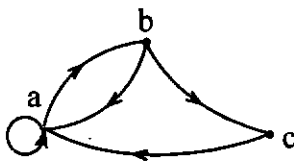
$((a, b) \in E)$  (یک یال جهتدار بین  $a$  و  $b$  در جهت  $a$  به  $b$  وجود دارد).

تذکر: اگر در گراف جهتدار  $G = (V, E)$  داشته باشیم،  $(a, a) \in E$ ، آنگاه یال جهتداری از  $a$  به خودش وصل می‌کنیم و به آن طوقه می‌گوییم.

مثال: اگر  $V = \{a, b, c\}$  و

$E = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (b, a)\}$ ، آنگاه گراف  $G = (V, E)$  را رسم کنید.

حل: چون مجموعه  $V$  سه عضو دارد، پس گراف دارای ۳ رأس است که ابتدا رأس‌ها را رسم می‌کنیم، سپس یال‌های جهتدار را با توجه به زوج‌های مرتب مجموعه  $E$  رسم می‌کنیم.



مرتبه و اندازه گراف جهتدار

در گراف جهتدار  $G = (V, E)$ ، تعداد اعضای مجموعه  $V$ ، یعنی تعداد رأس‌ها را مرتبه  $G$  و تعداد اعضای مجموعه  $E$ ، یعنی تعداد یال‌ها را اندازه  $G$  می‌نامیم.

فرض کنیم  $R$  یک رابطه  $m$  عضوی، روی مجموعه  $n$  عضوی  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  باشد،  $(m \leq n^2)$  متناظر با این رابطه، می‌توان یک گراف جهتدار رسم کرد؛ به طوری که این گراف از مرتبه  $m$  یعنی دارای  $n$  رأس  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و اندازه  $m$  است، یعنی اگر  $a_i R a_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$  و  $i \neq j$ ) آنگاه یال جهتداری از  $a_i$  به  $a_j$  رسم می‌کنیم. هرگاه  $a_i R a_i$  آنگاه یک طوقه در رأس  $a_i$  رسم می‌کنیم.

مثال: فرض کنیم  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ، رابطه  $R$  را روی  $A$  به صورت  $\{(x, y) \mid (x + y) \text{ فرد باشد}\}$  تعریف می‌کنیم، گراف جهتدار  $R$  را رسم کنید.



(برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی)



در این مقاله، خواص رابطه‌ها را به کمک گراف‌های جهتدار و ماتریس متناظر با یک رابطه بررسی خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا گراف جهتدار را معرفی می‌کنیم.

گراف جهتدار

فرض کنیم  $V$  یک مجموعه ناتهی و منتهی باشد و مجموعه  $E$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $V \times V$ ؛ یعنی  $E \subseteq V \times V$ ؛ در این صورت، گراف  $G$  متناظر با  $V$  و  $E$  یک

رأس های گراف متناظر با  $R$  دارای طوقه باشند.

۲. رابطه  $R$  تقارنی است؛ هرگاه برای  $a, b \in A$ ، اگر از  $a$  به  $b$  یالی داشته باشیم، آن گاه باید از  $b$  به  $a$  نیز یال وجود داشته باشد.

۳. رابطه  $R$  تعدی است؛ هرگاه برای  $a, b, c \in A$ ، اگر از  $a$  به  $b$  و از  $b$  به  $c$  یال هایی وجود داشته باشد، آن گاه از  $a$  به  $c$  نیز یال موجود باشد.

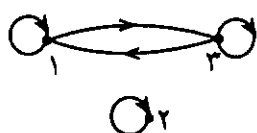
۴. رابطه  $R$  پاد تقارنی است، هرگاه برای  $a, b \in A$  که  $a \neq b$ ، اگر از  $a$  به  $b$  یال وجود داشته باشد، آن گاه از  $b$  به  $a$  یال موجود نباشد.

مثال: کدام یک از رابطه های زیر روی  $A = \{1, 2, 3\}$ ، خاصیت پاد تقارنی دارد؟

۱.  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

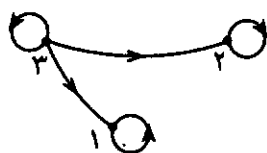
۲.  $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}$

حل: ۱. گراف متناظر با رابطه  $R_1$  به صورت زیر است:



با توجه به گراف، ملاحظه می کنیم که از ۱ به ۳ یال داریم و از ۳ به ۱ نیز یال داریم؛ پس  $R_1$  پاد تقارنی نیست.

۲. گراف متناظر با رابطه  $R_2$  به صورت زیر است:



با توجه به گراف، ملاحظه می کنیم که  $R_2$  پاد تقارنی است.

مثال: رابطه  $R$  روی مجموعه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  به صورت  $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$  تعریف شده است:

الف - گراف جهتدار متناظر با  $R$  را رسم کنید.

ب - آیا رابطه هم ارزی است؟

حل: الف - ابتدا رابطه  $R$  را با زوج های مرتب مشخص می کنیم:

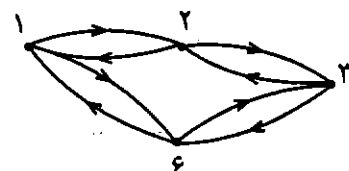
$$R = \{(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$$

سپس متناظر با رابطه بالا، گراف جهتدار رسم می کنیم:

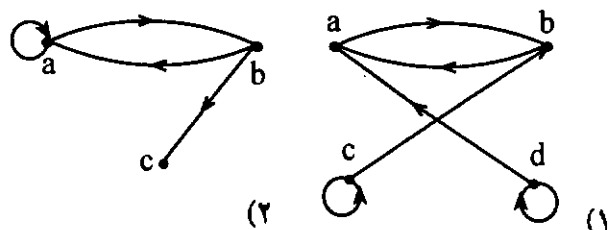
حل: ابتدا رابطه  $R$  را روی  $A$  می نویسیم، سپس متناظر با آن یک گراف رسم می کنیم:

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 6), (6, 1), (6, 3)\}$$

برای این منظور ابتدا چهار رأس در نظر می گیریم و اگر  $aRb$  آن گاه یال جهتداری از  $a$  به  $b$  رسم می کنیم:



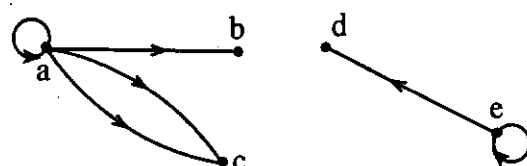
مثال: متناظر با گراف های جهتدار زیر، رابطه ها را بنویسید.



$$R_1 = \{(a, b), (b, a), (d, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c)\}$$

مثال: گراف جهتدار متناظر با رابطه  $R$  روی مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  به صورت زیر است، رابطه  $R$  را بنویسید.



حل: چون در رأس های  $a$  و  $e$  طوقه داریم، پس  $(a, a) \in R$  و  $(e, e) \in R$  و از  $a$  به  $b$  یال داریم؛ پس  $(a, b) \in R$ ، از  $b$  به  $a$  و از  $c$  به  $a$  یال داریم؛ پس  $(a, c) \in R$  و  $(c, a) \in R$ ، از  $e$  به  $d$  یال داریم؛ پس  $(e, d) \in R$ ؛ بنابراین داریم:

$$R = \{(a, a), (e, e), (a, b), (a, c), (c, a), (e, d)\}$$

تشخیص خواص رابطه ها به کمک گراف جهتدار

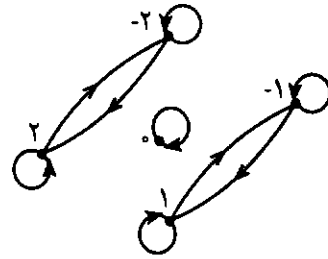
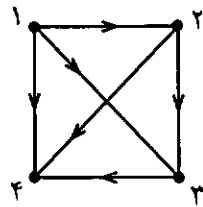
فرض کنیم  $A$  یک مجموعه و  $R$  رابطه ای روی  $A$  باشد. چنانچه گراف جهتدار متناظر با رابطه  $R$  را رسم کنیم، خواهیم داشت:

۱. رابطه  $R$  انعکاسی یا بازتابی است؛ هرگاه تمام

حل: الف - ابتدا رابطه  $R$  را با زوج‌های مرتب مشخص می‌کنیم:

$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$   
سپس متناظر با رابطه بالا، گراف جهتدار و ماتریس را مشخص می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



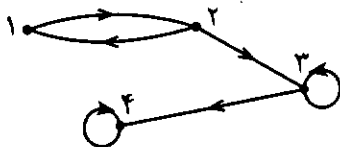
ب - هر رأس دارای طوقه است؛ پس  $R$  بازتابی است.  
چون از ۲ به ۲، از ۲ به ۱، از ۱ به ۱ و از ۱ به ۱ یال داریم،  
بنابراین  $R$  تقارنی است.  $R$  تعدی است؛ زیرا:

$$2R2 \text{ و } 2R-2 \rightarrow -2R-2 \text{ و } 2R2$$

$$-1R1 \text{ و } 1R-1 \rightarrow -1R-1 \text{ و } 1R1$$

در نتیجه،  $R$  رابطه هم ارزی است.

مثال: فرض کنید  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $R$  رابطه‌ای است که گراف جهتدار آن در شکل زیر رسم شده است؛ ماتریس متناظر با این رابطه کدام است؟



حل: چون  $1R2$  پس  $m_{12} = 1$ ،  $2R1$  پس  $m_{21} = 1$ ،  $2R3$  پس  $m_{23} = 1$ ،  $3R4$  پس  $m_{34} = 1$ ،  $4R3$  پس  $m_{43} = 1$  و بقیه درایه‌ها صفرند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنیم  $A = \{1, x, 4\}$  یک مجموعه سه عضوی و  $x \in \mathbb{N}$  و رابطه  $R$  را روی  $A$  به صورت  $xRy \Leftrightarrow x|y$  تعریف می‌کنیم، هرگاه ماتریس متناظر با این رابطه به صورت

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 باشد، مقدار  $x$  را محاسبه کنید.

حل: با توجه به سطر دوم ماتریس  $M$  داریم:  $x|4$ ، چون  $x$  سه عضوی است، پس  $x \neq 1, 4$  و  $x \in \mathbb{N}$ ، در نتیجه  $x = 2$ .

تشخیص خواص رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های متناظر با رابطه‌ها

فرض کنیم  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی و  $R$  رابطه‌ای روی  $A$  باشد. چنانچه ماتریس متناظر با رابطه  $R$  برابر  $M = [m_{ij}]_{n \times n}$  باشد ( $1 \leq i, j \leq n$ )، خواهیم داشت:

رابطه‌ها و ماتریس‌ها

فرض کنیم  $R$  رابطه‌ای روی مجموعه  $n$  عضوی  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  باشد، متناظر با این رابطه، ماتریس مربعی  $M = [m_{ij}]_{n \times n}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر  $(a_i, a_j) \in R$  آن‌گاه درایه  $m_{ij}$  ماتریس  $M$ ، یعنی  $m_{ij}$  برابر ۱ است و اگر  $(a_i, a_j) \notin R$  آن‌گاه  $m_{ij} = 0$ ؛ بنابراین درایه‌های ماتریس متناظر با رابطه به صورت زیر است:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R a_j \\ 0 & a_i \not R a_j \end{cases}$$

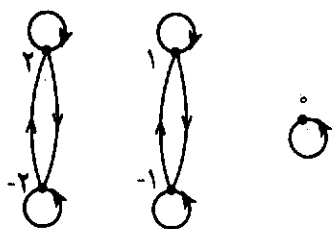
مثال: رابطه  $R = \{(c, b), (a, c), (a, a), (c, c)\}$  را روی  $A = \{a, b, c\}$  در نظر بگیرید، ماتریس متناظر با این رابطه را بنویسید.

حل: چون مجموعه  $A$  سه عضوی است، پس ماتریس  $M$  از مرتبه ۳ است؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون  $aRa$  پس درایه‌ای که در محل برخورد سطر  $a$  و ستون  $a$  قرار دارد، برابر ۱ است، به همین ترتیب، درایه‌هایی که در محل برخورد سطر  $a$  و ستون  $c$ ، سطر  $c$  و ستون  $b$ ، سطر  $c$  و ستون  $c$  قرار دارند، برابر ۱ هستند و بقیه درایه‌های ماتریس، برابر صفرند.

مثال: رابطه  $R$  روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به صورت  $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y\}$  است؛ گراف جهتدار و ماتریس متناظر با این رابطه را مشخص کنید.



چون در هر رأس طوقه داریم، پس  $R$  دارای خاصیت بازتابی است، از طرفی، چون از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ و از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال‌هایی داریم، پس  $R$  تقارنی است. همچنین  $R$  دارای خاصیت تعدی است؛ زیرا از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ یال داریم، و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۲ و ۲- طوقه وجود دارد. همین‌طور از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال داریم و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۱ و ۱- طوقه وجود دارد.

ب- چون مجموعه  $A$  دارای ۵ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبه  $5 \times 5$  است؛ با توجه به  $R$  داریم:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $M$ ، برابر ۱ است؛ پس  $R$  خاصیت بازتابی دارد. همچنین  $M^T = M$ ، یعنی  $M$  متقارن است؛ در نتیجه  $R$  دارای خاصیت تقارنی است.  $R$  دارای خاصیت تعدی است؛ زیرا:

$$m_{15} = 1, m_{51} = 1 \Rightarrow m_{11} = 1, m_{55} = 1$$

$$m_{22} = 1, m_{22} = 1 \Rightarrow m_{22} = 1, m_{22} = 1$$

اکنون تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی یک مجموعه  $n$  عضوی را که با استفاده از رابطه‌ها به دست آورده‌ایم، به کمک ماتریس متناظر با رابطه بسیار ساده‌تر بیان می‌کنیم.

**تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی به کمک ماتریس‌ها**

**خاصیت بازتابی.** فرض کنیم  $R$  یک رابطه روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  باشد، می‌دانیم ماتریس متناظر با این رابطه، مربعی از مرتبه  $n$  است؛ یعنی دارای  $n^2$  درایه است. بجز درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، می‌دانیم تعداد بقیه درایه‌ها برابر با  $n^2 - n$  است، حال اگر رابطه  $R$  بازتابی باشد، پس درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و بقیه درایه‌ها می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند، اکنون اگر درایه‌های روی غیر قطر اصلی را با مربع مشخص کنیم، در صورتی که  $R$  بازتابی باشد، درایه‌های روی

۱. رابطه  $R$  انعکاسی یا بازتابی است؛ هرگاه همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، برابر ۱ باشند.

۲. رابطه  $R$  تقارنی است؛ هرگاه ماتریس متناظر با آن متقارن باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow m_{ji} = 1, m_{ij} = 0 \Leftrightarrow m_{ji} = 0$$

یا به طور کلی برای هر  $1 \leq i, j \leq n$  داشته باشیم:  $m_{ij} = m_{ji}$

۳. رابطه  $R$  تعدی است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن داشته باشیم:

$$m_{ij} = 1 \text{ و } m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1$$

۴. رابطه  $R$  پادمتقارن است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن اگر برای  $i \neq j$  داشته باشیم  $m_{ij} = 1$ ، آن‌گاه  $m_{ji} = 0$ .

همچنین می‌توان گفت برای  $i \neq j$  داشته باشیم:  $m_{ij} \times m_{ji} = 0$ .

مثال: فرض کنید  $A = \{a, b, c, d\}$  و  $R = \{(d,d), (a,a), (a,b), (c,c), (b,a), (b,b)\}$  یک رابطه روی  $A$  باشد، با استفاده از ماتریس مجاورت گراف، نشان دهید  $R$  روی  $A$  یک رابطه هم ارزی است.

حل: چون مجموعه  $A$  دارای ۴ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبه  $4 \times 4$  است، با توجه به رابطه  $R$  داریم:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

چون همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $M$  برابر ۱ است، پس  $R$  دارای خاصیت بازتابی است و از طرفی  $M^T = M$ ، یعنی برای هر  $1 \leq i, j \leq 4$  داریم:  $m_{ij} = m_{ji}$ ؛ در نتیجه، رابطه  $R$  دارای خاصیت تقارنی است و همچنین رابطه  $R$  تعدی است؛ زیرا داریم:

$$m_{12} = 1 \text{ و } m_{21} = 1 \Rightarrow m_{11} = 1 \text{ و } m_{22} = 1$$

مثال: رابطه  $R$  در مجموعه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  به صورت

$$xRy \Leftrightarrow |x| = |y| \text{ تعریف شده است؛}$$

الف- گراف متناظر با این رابطه را رسم کنید.

ب- ماتریس متناظر با این رابطه را تشکیل دهید.

ج- به کمک ماتریس بررسی کنید که آیا  $R$  روی  $A$  یک رابطه هم ارزی است.

حل: الف- ابتدا رابطه  $R$  را روی  $A$  مشخص می‌کنیم، سپس با استفاده از آن، گراف متناظر با رابطه را رسم می‌کنیم:

$$R = \{(-2, -2), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 1), (2, -2), (2, 2)\}$$

خاصیت تقارنی و بازتابی. اگر ماتریس مربعی  $M$  از مرتبه  $n$  متناظر با رابطه  $R$ ، روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  باشد، و  $R$  دارای خواص بازتابی و تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی برابر ۰ هستند؛ بنابراین اگر هر درایه ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی و بازتابی روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  می‌باشد:

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\frac{1}{2}(n^2-n) \text{ مرتبه}} = 2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

خاصیت پادتقارنی. فرض کنیم  $R$  یک رابطه روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  وجود دارد. در صورتی که  $R$  رابطه پادتقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی، می‌تواند عددی ۰ یا ۱ باشد و برای درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی سه حالت وجود دارند، که عبارتند از:  $m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ji} = 1$  یا  $m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ji} = 0$  یا  $m_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ji} = 0$ ؛ بنابراین اگر هر درایه ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی هر کدام با ۲ حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$\text{تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعه } n \text{ عضوی } A = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\frac{1}{2}(n^2-n) \text{ مرتبه}} = 2^n \times 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

مسئله: فرض کنیم  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد، چند رابطه روی  $A$  می‌توان تعریف کرد که بازتابی و پادتقارنی باشند؟

حل: متناظر با رابطه بازتابی و پادتقارنی  $R$  روی مجموعه  $A$ ، ماتریس مربعی  $M$  از مرتبه  $n$  را در نظر بگیریم. چون  $R$  بازتابی است، پس درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $M$ ، همگی برابر ۱ هستند. از طرفی،  $R$  پادتقارنی است؛ پس برای

قطر اصلی عدد ۱ و بقیه درایه‌ها، یعنی داخل مربع‌ها می‌تواند عددی ۰ یا ۱ قرار گیرند؛ بنابراین هر مربع با دو حالت پُر می‌شود، پس طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$ ، برابر با  $2^{n^2-n}$  است.

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  می‌باشد:

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{(n^2-n) \text{ مرتبه}} = 2^{n^2-n}$$

خاصیت تقارنی. فرض کنیم  $R$  یک رابطه روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  وجود دارد که تعداد درایه‌های بالا قطر اصلی یا پایین قطر اصلی آن برابر  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  است و تعداد درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی ماتریس برابر  $\frac{1}{2}(n^2 - n) + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$  است. اکنون اگر رابطه  $R$  تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، می‌تواند عددی ۰ یا ۱ باشند، بنابراین اگر هر درایه ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، هر کدام با ۲ حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  می‌باشد:

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\frac{1}{2}(n^2+n) \text{ مرتبه}} = 2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

چون ماتریس  $M$  متقارن است، یعنی  $M = M^T$ ؛ بنابراین داریم:  $m_{ji} = m_{ij}$ ، یعنی برای محاسبه تعداد رابطه‌های تقارنی، فقط کافی است مربع‌های بالا (یا پایین) قطر را علاوه بر مربع‌های روی قطر اصلی در نظر بگیریم.

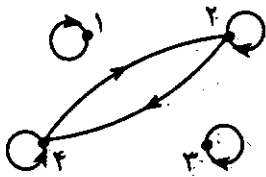
$(a, b)$  با شرط  $(a \neq b)$  است. برابر با  $\frac{1}{2}(n^2-n)-1$  است. بنابراین داریم:

$$n=5 \Rightarrow 2^5 \times 3^{\frac{1}{2}(5^2-5)-1} = 2^5 \times 3^9$$

مثال: روی مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  چند رابطه بازتابی می‌توان نوشت که شامل  $(a, c)$  باشند؛ ولی شامل  $(c, a)$  نباشند؟

حل: اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، عدد ۱ هستند و درایه متناظر با  $(a, c)$  عدد ۱ و درایه متناظر با  $(c, a)$  عدد ۰ است؛ بنابراین  $2 - (n^2 - n) = 2 - (5^2 - 5) = 2 - 20 = -18$

مثال: رابطه  $R$  روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  با گراف جهتدار زیر تعریف شده است،  $[2]$  (دسته هم‌ارزی ۲) را مشخص کنید.



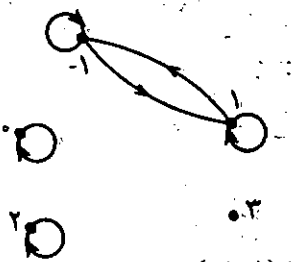
حل: ابتدا رابطه متناظر با گراف بالا را می‌نویسیم:  
 $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (3, 3)\}$   
 سپس طبق تعریف کلاس یا دسته هم‌ارزی داریم:

$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R\} = \{2, 4\}$   
 مثال: مجموعه  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  و رابطه  $R$  روی  $A$  به صورت  $R = \{(x, y) : |x| = |y|\}$  تعریف شده است:  
 الف - گراف جهتدار متناظر با  $R$  را بنویسید.

ب - با استفاده از گراف جهتدار متناظر با  $R$ ، تحقیق کنید  $R$  پادمتقارن است یا خیر؟

حل: الف - ابتدا رابطه  $R$  را با زوج‌های مرتب مشخص می‌کنیم:

$$R = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (0, 0), (2, 2), (3, 3)\}$$



ب - چون  $(-1, 1) \in R$  و

$(1, -1) \notin R$  بنابراین  $R$  پادمتقارن نیست.

درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، سه حالت وجود دارد. بنابراین اگر هر درایه ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی، هر کدام فقط با یک حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند، در نتیجه داریم:

$$\text{تعداد رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی مجموعه } n \text{ عضوی} \\ = \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1}_n \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\frac{1}{2}(n^2-n)} = 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

نکته: تعداد رابطه‌هایی که تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه  $n$  عضوی  $A$  باشند، برابر با  $2^n$  است؛ زیرا اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، می‌توانند ۰ یا ۱ باشند و بقیه درایه‌ها برابر ۰ هستند.

مثال: اگر مجموعه‌ای دارای ۱۰ زیرمجموعه ۳ عضوی باشد، چند رابطه پاد متقارن و بازتابی می‌توان روی آن مجموعه نوشت؟

حل: می‌دانیم که اگر  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی آن  $(k \leq n)$  از ترکیب  $\binom{n}{k}$  به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$\binom{n}{3} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = 10 \\ \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n = 5$$

$$\text{تعداد رابطه‌های بازتابی و پاد تقارنی} \\ \text{روی مجموعه ۳ عضوی} = 3^{\frac{1}{2}(3^2-3)} = 3^3 = 27$$

مثال: تعداد رابطه‌های بازتابی و شامل دو زوج مرتب  $(a, b)$  و  $(c, d)$  روی یک مجموعه، برابر  $2^{18}$  است. چند رابطه پادتقارنی که شامل یک زوج مرتب  $(a, b)$  است، روی این مجموعه می‌توان نوشت؟  $(a \neq b, c \neq d)$

حل: می‌دانیم تعداد رابطه‌های بازتابی روی یک مجموعه  $n$  عضوی که شامل  $k$  زوج مرتب  $(k \leq n^2 - n)$  باشند، برابر با  $2^{(n^2-n)-k}$  است؛ بنابراین داریم:

$$2^{(n^2-n)-2} = 2^{18} \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \in \mathbb{N} & \text{قابل قبول} \\ n = -4 \notin \mathbb{N} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

از طرفی تعداد رابطه‌های پادتقارنی که شامل یک زوج مرتب