

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته تر) (قسمت اول)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در آنالیز ترکیبی یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصول جمع و ضرب برای شمارش استفاده می شود، حال آن که شمارش می تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. یکی از این ابزارها گراف های جهت دار و ماتریس های مجاورت وابسته به این گراف ها، توأم با اصل ضرب است. هم چنین، از اصولی چون اصل لانه کبوتری و اصل شمول و عدم شمول نیز می توان برای شمارش و حل مسائل شمارشی در آنالیز ترکیبی استفاده کرد. در این مقاله سعی می کنیم، پس از تعریف گراف های جهت دار و بیان ارتباط آن ها با رابطه ها و نیز تعریف و بررسی خواص رابطه ها، به شمارش رابطه های با خواص معین بپردازیم.

لازم به تذکر است، وقتی می توانیم تعداد رابطه های تعریف شده روی یک مجموعه ی n عضوی با خاصیت یا خواص معین را بشمریم که خواص رابطه ها را خوب درک کرده باشیم. بنابراین، ابتدا به مثال ها و مسائل حل شده ی مربوط به خواص رابطه ها دقت بفرمایید.

الف) گراف جهت دار

تعریف: اگر V مجموعه ای متناهی فرض شود و $V \times V$ را تشکیل دهیم، هر زیر مجموعه ی $V \times V$ مانند E ، به همراه V یک گراف جهت دار را تعریف می کند. در این گراف جهت دار، برای هر زوج مرتب (a_i, a_j) یالی با جهت از طرف a_i به طرف a_j رسم می کنیم.

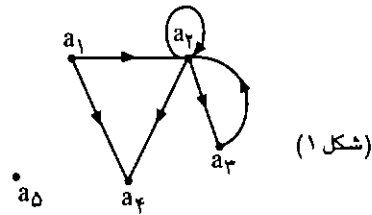
$$V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$E \subseteq V \times V = \{(a_i, a_j) | a_i, a_j \in V\}$$

مثال ۱. در شکل ۱، گراف جهت دار متناظر با مجموعه های V و E رسم شده است.

$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$E = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_4, a_4)\}$$



رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی دارد.
مثال ۲. اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ در این صورت رابطه‌ی زیرانعکاسی است:

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (2, 6)\}$$

□ اگر A مجموعه‌ای m عضوی باشد و رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی داشته باشد، در این صورت R حداقل m عضوی است.

□ رابطه‌ی تهی روی A خاصیت انعکاسی ندارد.

با توجه به تعریف گراف جهت دار، هر رابطه را می‌توان به عنوان مجموعه یال‌های یک گراف جهت دار تصور کرد و مجموعه‌ی A که رابطه‌ی R روی آن تعریف شده است، مجموعه‌ی رأس‌های آن گراف است که در این صورت می‌توان گفت:

«رابطه‌ی R انعکاسی است اگر و فقط اگر روی هر رأس گراف متناظر با این رابطه، طوقه وجود داشته باشد و روی قطر اصلی ماتریس مجاورت این گراف، همه‌ی درایه‌ها یک باشند.»

۲. خاصیت تقارنی: $\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$

این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تقارنی دارد.

مثال ۳. اگر رابطه‌ی R_1 روی $A = \{2, 4, 6, 8\}$ به

$$\text{صورت } R_1 = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (6, 6), (8, 6)\}$$

شود، خاصیت تقارنی ندارد، زیرا $8R_1 6$ و $6 \not R_1 8$ و رابطه‌ی $R_2 = \{(2, 2), (4, 2), (2, 4)\}$ خاصیت تقارنی دارد.

تذکره ۱

رابطه‌ی R روی A خاصیت تقارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس یالی وجود نداشته باشد یا دو یال موجود باشد. و ماتریس متناظر با این گراف، ماتریس متقارن خواهد بود.

۳. خاصیت پاد تقارنی: $\forall a \neq b \in A, aRb \Rightarrow b \not R a$

این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت پاد تقارنی دارد.

مثال ۴. رابطه‌ی R_1 روی $A = \{2, 4, 6, 8\}$ به این صورت

تعریف شده است:

$$R_1 = \{(2, 2), (2, 4), (6, 6), (6, 8), (4, 8)\}$$

نکته: تعداد کل گراف‌های جهت دار که با p رأس می‌توان تعریف کرد، برابر است با: « p^p ».

تفاوت‌های ماتریس مجاورت گراف‌های جهت دار با گراف‌های ساده

۱. در گراف‌های جهت دار، درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند یک باشند.

۲. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت دار می‌تواند متقارن نباشد.

۳. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت دار، با تعداد اعضای E برابر است.

۴. وجود یک سطر صفر یا یک ستون صفر در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت دار، دلیل بر ایزوله (تنها) بودن یک رأس نیست.

تعریف

اگر A مجموعه‌ای ناتهی و دلخواه باشد، هر زیر مجموعه‌ی $A \times A$ را یک رابطه روی A می‌نامیم.

اگر $|A| = m$ ، در این صورت $|A \times A| = m^2$ و طبق

تعریف، m^2 رابطه روی A می‌توان تعریف کرد.

قرارداد: اگر رابطه‌ی R روی A تعریف شده باشد، در این صورت:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow aRb$$

$$(a, b) \notin R \Leftrightarrow a \not R b$$

(ب) خواص رابطه‌ها

۱. خاصیت انعکاسی:

$$\forall a \in A, aRa$$

این صورت

رابطه‌ی R_1 خاصیت پادتقارنی دارد و رابطه‌ی $R_2 = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$ خاصیت پادتقارنی ندارد.

تذکر ۲

- هر رابطه‌ی یک عضوی حتماً خاصیت پادتقارنی دارد.
- رابطه‌ی R روی A خاصیت پادتقارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس متمایز، حداکثر یک یال وجود داشته باشد (وجود یا نبود طوقه روی رأس‌ها، در خاصیت پادتقارنی بی تأثیر است).
- در ماتریس مجاورت رابطه‌های پادتقارنی، اگر درایه‌ای یک باشد، قرینه‌ی آن درایه نسبت به قطر، حتماً صفر است.

۴. خاصیت تعدی (تراگذری یا ترایی):

$\forall a, b, c \in A, (aRb, bRc) \Rightarrow (aRc)$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تعدی دارد.

مثال ۵. اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ، در این صورت:

$R_1 = \{(2,4), (6,8)\}$ (خاصیت تعدی دارد)

$R_2 = \{(2,2), (2,4), (4,8), (6,6), (6,8)\}$ (خاصیت تعدی ندارد)

زیرا: $2R4$ و $4R8$ ولی $2R8$ نیست.

$R_3 = \{(2,4), (4,2), (2,2)\}$ (خاصیت تعدی ندارد)

زیرا: $2R4$ و $4R2$ ولی $2R2$ نیست.

تذکر ۳

- هر رابطه‌ی تک عضوی حتماً خاصیت تعدی دارد.
- رابطه‌ی تهی روی A سه خاصیت تقارنی، پادتقارنی و تعدی را به انتهای مقدم داراست.
- تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A سه خاصیت انعکاسی، تقارنی (پادتقارنی) و تعدی را دارا باشد، آن را یک رابطه‌ی هم‌ارزی (ترتیب) می‌نامیم.

تعداد رابطه‌ها با خواص معین

۱. تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی n عضوی تعریف کرد و خاصیت انعکاسی داشته باشد، برابر است با: $2^{n(n-1)}$
- مثال ۶. چند رابطه روی یک مجموعه‌ی

۴ عضوی می‌توان تعریف کرد که انعکاسی، شامل (a,b) و فاقد (c,d) باشند.

$$2^{16} (4) \quad 2^8 (3) \quad 2^{10} (2) \quad 2^{12} (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است زیرا: $2^{10} = 2^{(n^2-n)-2}$ (چرا؟)

رابطه‌همانی

رابطه‌ی همانی روی مجموعه‌ی A را با I نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم: $I = \{(a,a) \in A^2 | a \in A\}$ بنابه تعریف بالا، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، رابطه‌ی همانی روی A یعنی I نیز k عضوی است. برای مثال، اگر $A = \{2, 4, 6\}$ آن‌گاه

$$I = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$$

□ رابطه‌ی همانی روی A ، هم رابطه‌ی ترتیب است و هم رابطه‌ی هم‌ارزی و این تنها رابطه‌ای است که هم‌ارزی و ترتیب است.

۲. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد که هم تقارنی باشند و هم پادتقارنی، برابر است با: 2^n (هر زیر مجموعه‌ی رابطه‌ی همانی) برای مثال، رابطه‌ی $R = \{(2,2), (4,4)\}$ هم تقارنی است و هم پادتقارنی.

۳. تعداد رابطه‌های تقارنی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی n عضوی تعریف کرد، برابر است با: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(درایه‌های روی قطر برابر با n و نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر می‌تواند صفر یا یک باشد که مجموع تعداد این درایه‌ها برابر است با:

$$(n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2})$$

۴. تعداد رابطه‌هایی که روی مجموعه‌ی n عضوی A می‌توان تعریف کرد و خاصیت پادتقارنی دارند، برابر است با:

$$2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

$$\frac{n^2-n}{2} \Rightarrow 3^{\frac{n^2-n}{2}} \Rightarrow \text{درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی}$$

$$n \Rightarrow 2^n \Rightarrow \text{درایه‌ی روی قطر}$$

□ روی نصف درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی

اختیار داریم و این اختیار سه حالتی است؛ به این

صورت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \dots & \\ & & & \square \\ & & & & \square \end{bmatrix}_{n \times n}$$

۵. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد، به طوری که دو خاصیت انعکاسی و

$$\text{تقارنی داشته باشند، برابر است با: } \frac{n^2 - n}{2}$$

۶. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد که دو خاصیت انعکاسی و پادتقارنی داشته

$$\text{باشند، برابر است با: } \frac{n^2 - n}{2}$$

تذکر ۴

هر افزاز مجموعه‌ی A با یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A متناظر است. در واقع اگر هر یک از مجموعه‌های افزاز کننده را در خودش ضرب دکارتی و اجتماع همه‌ی آن‌ها را حساب کنیم، مجموعه‌ی حاصل یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت: «تعداد افزازهای ممکن برای مجموعه‌ی A برابر است با تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توان روی A تعریف کرد.»

مثال ۷. اگر مجموعه‌ی $B = \{\{2, 4\}, \{6, 7\}, \{8\}\}$

یک افزاز سه‌عضوی برای مجموعه‌ی $A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ باشد، رابطه‌ای روی A تعریف کنید که کلاس‌های هم‌ارزی آن رابطه، اعضای B باشند.

$$\text{پاسخ: } R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \\ \Rightarrow R = \{(2, 2), (4, 4), (2, 4), (4, 2), (6, 6), (7, 7), (6, 7), (7, 6), (8, 8)\}$$

تمرین: تعداد افزازهای مجموعه‌های سه‌عضوی، چهار عضوی و پنج‌عضوی را بیابید.

مثال ۸. چند رابطه روی مجموعه‌ی A می‌توان

تعریف کرد، به شرط آن که پادتقارنی، شامل (a, a) و فاقد (a, b) باشند؟

$$(1) \quad 2^4 \times 3^4 \quad (2) \quad 2^3 \times 3^5 \quad (3) \quad 2^3 \times 3^4 \quad (4) \quad 2^4 \times 3^5$$

پاسخ: چون طبق فرض، رابطه شامل (a, a) است، پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه فاقد (a, b) است، درایه‌ی مربوط به (a, b) صفر، اما برای درایه‌ی مربوط به (b, a) دو حالت امکان‌پذیر است (صفر یا یک) که در این صورت به انتخاب‌های دو وضعیتی ما یکی اضافه و از انتخاب‌های سه وضعیتی ما یکی کم می‌شود و چون قبلاً از دو وضعیتی ما یکی کم شده بود، در واقع تغییری در دو وضعیتی‌ها رخ نمی‌دهد. یعنی این تعداد رابطه برابر است با:

$$2^{4-1+1} \times 3^{6-1}$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است.

مثال ۹. چند رابطه‌ی ۴ عضوی روی مجموعه‌ی A می‌توان تعریف کرد، به شرط آن که پادتقارنی، شامل (a, a) و شامل (a, b) باشند؟

$$(1) \quad 2^4 \times 3^4 \quad (2) \quad 2^3 \times 3^5 \quad (3) \quad 2^3 \times 3^4 \quad (4) \quad 2^4 \times 3^5$$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است. چون طبق فرض، رابطه شامل (a, a) است. پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه شامل (a, b) است، درایه‌ی مربوط به (a, b) یک و درایه‌ی مربوط به (b, a) صفر است. در این صورت، از انتخاب‌های دو وضعیتی ما یکی کم و از انتخاب‌های سه وضعیتی ما نیز یکی کم می‌شود. یعنی تعداد رابطه‌ها برابر است با: $2^3 \times 3^5$

تعریف

روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، عمل ضربی تعریف می‌کنیم که این عمل در این مجموعه بسته باشد. به عبارت دیگر، حاصل ضرب دو ماتریس مجاورت، یک ماتریس مجاورت با درایه‌های صفر یا یک باشد. برای این کار، ماتریس‌ها را به روش معمول (سطر در ستون) ضرب می‌کنیم و هنگام ضرب یک سطر در یک ستون تعریف می‌کنیم:

$$1+1=1$$

$$\begin{bmatrix} A & A \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۰.

پاسخ: R انعکاسی است زیرا:

$$I) M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 \leq M$$

II) $M^T \neq M \Rightarrow$ R متقارن نیست.

$$III) M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M^2 \not\leq M$ ، پس R تراگذری نیست.

$$IV) M \wedge M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\leq I_3$$

R پاد متقارن نیست.

قضیه ۲: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی n عضوی A تعریف شده باشد و ماتریس مجاورت این رابطه را M بنامیم، در این صورت:

$$I) R = \emptyset \Leftrightarrow M = [0]$$

$$II) R = A \times A \Leftrightarrow M = [1]$$

$$III) M_{(RoR)} = (M_{(R)})^T$$

مثال ۱۴. اگر $R = \{(2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (6, 4), (6, 6)\}$ روی مجموعه‌ی $A = \{2, 4, 6\}$ تعریف شده باشد، با استفاده از قضیه ۲، RoR را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{RoR}$$

$$\Rightarrow RoR = A \times A$$

ترکیب رابطه‌ها (ترکیب یک رابطه با خودش)

تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A تعریف شده باشد، ترکیب رابطه‌ی R با خودش را با نماد RoR نمایش می‌دهیم و داریم: « $a(RoR)c$ اگر و فقط اگر b ای در A باشد، به قسمی که aRb و bRc »

$$R = \{(2, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 4)\}$$

$$RoR = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 2), (3, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$$

$$(2R4, 4R2 \Rightarrow 2R2)$$

تعریف: رابطه‌ی $\leq$ را روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \leq B \Leftrightarrow \forall i, j, a_{ij} \leq b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۱.

نکته: معادله‌ی $A \leq x$ در مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، دارای (تعداد یک‌های A) جواب و معادله‌ی $A \leq x$ دارای (تعداد صفرهای A) جواب است.

قضیه ۱: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی n عضوی A تعریف شده باشد و ماتریس مجاورت متناظر با رابطه‌ی R باشد و I_n رابطه‌ی همانی روی A باشد، در این صورت:

$$I) I_n \leq M \Leftrightarrow$$
 رابطه‌ی R انعکاسی است.

$$II) M^T = M \Leftrightarrow$$
 R متقارن باشد

$$III) M^2 \leq M \Leftrightarrow$$
 R تراگذری یا تعدی است.

$$IV) M \wedge M^T \leq I_n \Leftrightarrow$$
 R پادتقارنی است.

(اثبات این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته‌ی پیش‌دانشگاهی آمده است.)

ضرب مؤلفه به مؤلفه بین دو ماتریس A و B را با نماد $(A \wedge B)$ نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ در این صورت}$$

داریم:

$$(A \wedge B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 0 \times 1 \\ 1 \times 1 & 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۳. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{2, 4, 6\}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه ۱، خواص R را بررسی کنید.

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (4, 2), (2, 6)\}$$