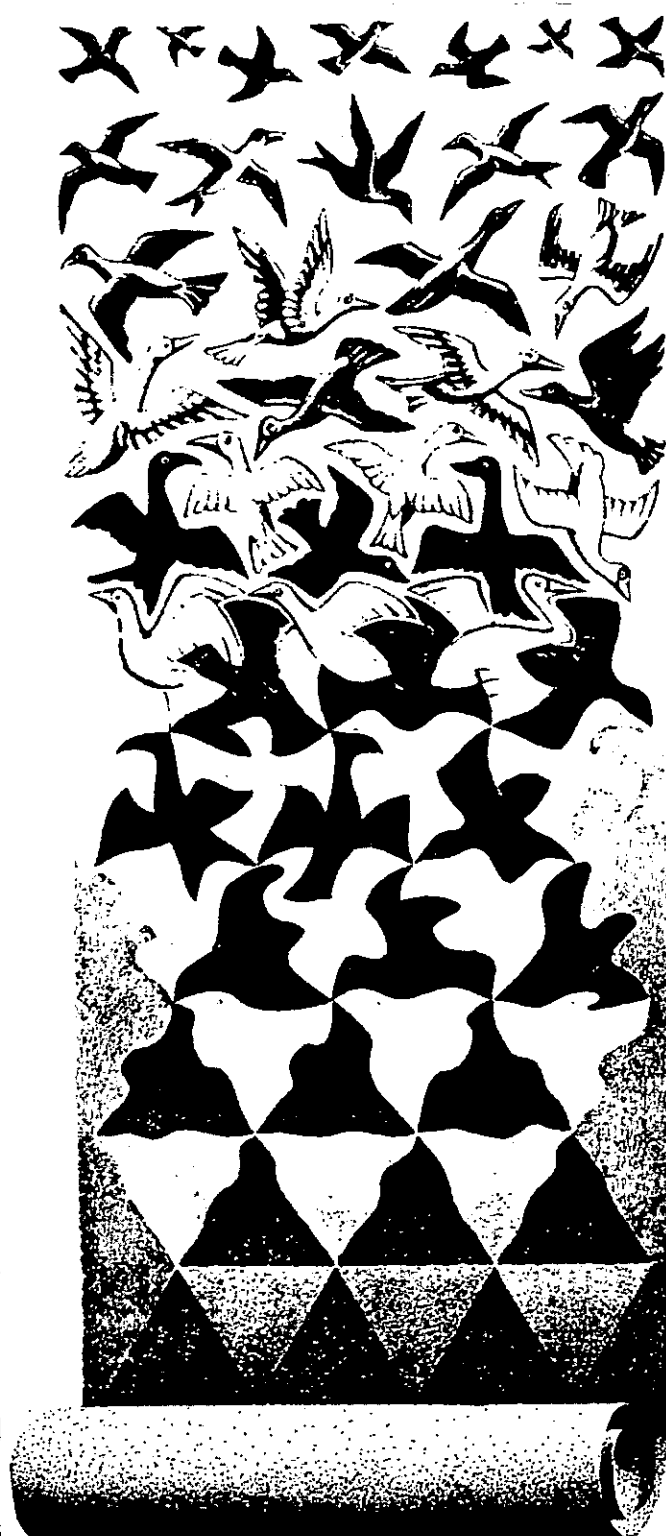


ترکیبیات

قابل استفاده دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی

● ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده

دبیر ریاضی اراک



ترکیبیات شاخه‌ای بسیار قدیمی از ریاضیات است، که بیشتر هنگام مطالعه جایگشتها و ترکیبها با آن آشنا شده‌ایم. در سالهای اخیر، هم به دلیل آن که کامپیوترها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته‌اند و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم کامپیوتری مطرح شده‌اند، نیاز به روشهای ترکیباتی دارند، رشدی انفجارآمیز در این زمینه به وجود آمده است.

این مقاله شامل دو بخش می‌باشد: بخش اول: اصل طرد و شمول و کاربردهایی از آن

بخش دوم: تعیین تعداد روابط روی یک مجموعه n عضوی تحت شرایط خاص که هردو از مفاهیم ترکیبیات به‌شمار می‌روند.

اصل طرد و شمول و کاربردهایی از آن

هدف اصلی در این بخش، بیان اصل طرد و شمول و کاربرد آن می‌باشد. به همین منظور ابتدا خلاصه‌ای از جایگشتها و ترکیبها ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که هنگام پرداختن به این بحث، ۴ مورد با علامت ** مشخص شده‌اند، که به نظریه اشغال معروف می‌باشند و تنها جهت پاسخگویی به سؤالات احتمالی که ممکن است در بخش بعد (روابط و افزاها) برای شما مطرح شدند، بیان شده‌اند.

جایگشتها

۱- ترتیب بدون تکرار: در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $1 \leq r \leq n$ ، طبق اصل ضرب، تعداد جایگشتهای (انتخابهای مرتب) r اندازه‌ای n شیء مزبور عبارت است از: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ (البته به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم).

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

۲- ترتیب با تکرار: تحت شرایط ذکر شده در بالا، منتهی در صورت مجاز بودن تکرار، بنابه اصل ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \geq 0$ موجود است.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، به شرطی که قرار گرفتن بیش از یک مهره در جعبه‌ها بلامانع باشد، n^r می‌باشد (مهره اول را در n جعبه می‌توان قرار داد و مهره دوم را نیز در n جعبه و ... مهره r ام را در n جعبه).

۳- جایگشت اشیایی که شامل r نوع مختلفند. می‌دانیم تعداد جایگشتهای متمایز n شیء متمایز برابر است با $n!$. حال اگر n شیء متمایز نباشند، چه‌طور؟ این موضوع را با یک مثال روشن می‌کنیم. برای مثال می‌خواهیم ببینیم با حروف کلمه «شیمی» چند جایگشت می‌توان ساخت؟

اگر به‌طور موقتی برای تمایز دو حرف «ی» در کلمه شیمی این ۲ حرف را با Y و y نشان دهیم، ۴! جایگشت مختلف از حروف ش، ی، م، Y وجود دارد. اما اگر زیرنویسها را

حذف کنیم، آن‌گاه به عنوان نمونه دو جایگشت «م ی ش ی» و «م ی ش ی» هر دو «م ی ش ی» را نتیجه می‌دهند و بنابراین هر ۲! جایگشتهای با زیرنویس، فقط یک آرایش بدون زیرنویس را به دست می‌دهند و تعداد کل آرایشهای حروف کلمه «شیمی» برابر است با $\frac{4!}{2!} = 12$.

به‌طور کلی اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... و n_r شیء از نوع r ام با $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ موجود باشند. در این صورت $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارد. (اشیاء با هم نوع تمایز ناپذیرند).

مسئله ۱: با حروف کلمه pepper چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ حل: $\frac{6!}{3! 1! 1! 1!} = 60$.

ترکیبها

۱- ترکیب بدون تکرار: اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $0 \leq r \leq n$ ، تعداد ترکیبهای (انتخابهای نامرتب) r عضوی از این n شیء برابر است با $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم. به جای نماد $C(n, r)$ می‌توان از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کرد. توجه داشته باشیم که $\binom{n}{0} = 1$ و $\binom{n}{n} = 1$.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره غیر متمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $\binom{n}{r}$.

مسئله ۲: یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد، هرگاه او مجبور باشد از ۵ سؤال اول به ۳ سؤال و از ۵ سؤال آخر به ۴ سؤال پاسخ دهد؟

حل: تعداد روشهای انتخاب ۳ سؤال از ۵ سؤال اول $\binom{5}{3}$ می‌باشد و تعداد روشهای انتخاب ۴ سؤال از ۵ سؤال دوم $\binom{5}{4}$

می باشد. لذا طبق اصل ضرب $\binom{5}{3}\binom{5}{4} = 5^5$ روش برای پاسخگویی موجود است.

۲ - قضیه: تعداد راههای افزای مجموعه ای از n شیء متمایز به r زیرمجموعه با n_1 شیء در اولین زیرمجموعه و ... و n_r شیء در r مین زیرمجموعه برابر است با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

(اثبات به عهده خواننده است).

مسأله ۳: به چند طریق می توان ۷ دانشمند را در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دوتخته هتلی جای داد؟

$$\text{حل: } \binom{7}{3, 2, 2} \left[= \binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \right] = \frac{7!}{3! 2! 2!}$$

۳ - ترکیب با تکرار: نماد $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبهای n شیء مختلف را نشان می دهد که هر بار r تایی آنها را انتخاب کنیم. اکنون فرض کنیم از هریک از n شیء چند نمونه همانند، مانند ترکیبهای یکسان کتابها در یک کتابفروشی وجود داشته باشد، بنابراین می توانیم این سؤال را مطرح کنیم که برای n رسته متمایز از اشیاء، که از هریک از آنها حداقل r نمونه موجود است، چند ترکیب مختلف از r شیء وجود دارد (هر ترکیب ممکن است شامل چند شیء نامتمایز از اشیای یک رسته باشد). برای روشن شدن این موضوع از یک مثال استفاده می کنیم.

مهره های یک بازی به ۴ رنگ قرمز، سفید، آبی، زرد هستند. به چند طریق می توان ۷ مهره را از بین آنها انتخاب کرد، هرگاه مجاز به تکرار انتخاب باشیم (یا هرگاه از هر رنگ مهره حداقل ۷ مهره داشته باشیم).

حل: ممکن است ۷ مهره انتخاب شده هم رنگ باشند برای مثال قرمز، و یا ممکن است از رنگهای مختلف باشند.

چون تصمیم داریم ۷ مهره انتخاب کنیم، ۷ علامت «x» در نظر گرفته و با توجه به این که مهره ها ۴ نوعند، $4 - 1 = 3$ علامت «|» در نظر می گیریم. ادعا می کنیم هر آرایشی که با ۷ علامت «x» و ۳ علامت «|» تشکیل می شود، یک جواب مسأله است. برای مثال برای تعیین تعداد مهره های قرمز جای اولین

«|» را تعیین کرد. و تعداد «x» هایی را که در سمت چپ آن است می شماریم. برای تعیین تعداد مهره های سفید، تعداد «x» که بین اولین و دومین «|» است می شماریم. به همین ترتیب، تعداد مهره های آبی و زرد را به ترتیب مساوی تعداد «x» های بین دومین و سومین «|»، و تعداد «x» های سمت راست سومین «|» قرار می دهیم. برعکس، اگر تعداد مهره های قرمز و سفید و آبی و زرد انتخاب شده به ترتیب ۲ و ۰ و ۱ و ۴ باشد، متناظر با این جواب می توان آرایش $x \times x \times x \times | \times | \times x \times x$ را در نظر گرفت. لذا

تعداد راههای انتخاب با تکرار ۷ مهره از بین ۴ مهره متمایز، برابر است با تعداد حالاتی که می توان ۷ «x» و ۳ «|» را کنار هم قرار داد و این نیز طبق فرمول ۳ جایگشتها برابر است با

$$\frac{10!}{7! 3!} = \binom{10}{7}$$

بنابراین تعداد انتخابهای با تکرار r شیء از n شیء متمایز برابر است با تعداد ترتیبهای r تا «x» و $n-1$ تا «|» و این نیز برابر است با $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ ، که آن را با نماد $a(n, r)$ نمایش می دهند.

البته این فرمول را می توان با نوشتن رابطه بازگشتی مناسب و حل آن از طریق تابع مولد نیز به دست آورد.

نکته: عبارات زیر هم ارز هستند: ۱ - تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ ، $x_i \geq 0$ ، $1 \leq i \leq n$

۲ - تعداد انتخابهای با تکرار r شیء از n شیء متمایز.

۳ - تعداد راههای توزیع r شیء مشابه در n ظرف متمایز، با فرض این که در هر ظرف، بیش از یک شیء بتواند قرار گیرد. و در هر ۳ مورد تعداد جوابها برابر است

با $\binom{n+r-1}{n-1} = (n+r-1)$ رابطه

مثال ۱: ۲۰ کتاب مختلف در نظر بگیرید، که از هر کدام

تعداد نامحدودی در دسترس است. تعداد حالاتی که می توان

۱۰ کتاب از بین آنها انتخاب کرد، به شرطی که الف) تکرار مجاز

باشد، برابر است با $\binom{29}{10} = \binom{29}{10}$ ، چون موضوع

انتخاب با تکرار ۱۰ شیء از ۲۰ شیء متفاوت است. ب) تکرار

یک را نسبت می‌دهیم. لذا هر جواب صحیح و مثبت معادله فوق با یک جواب صحیح و غیرمنفی معادله ⑤ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$ متناظر است. برای مثال جواب $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 15$ از معادله ⑤ با جواب $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 8, x_4 = 14$ از معادله ⑤ متناظر است (کافی است برای پیدا کردن مقدار جوابهای معادله ⑤، به جوابهای به دست آمده از معادله ⑤ یک را اضافه کنیم). لذا تعداد جوابهای هر دو معادله با هم برابر است که با توجه به فرمول $\binom{31}{3}$ یا $\binom{4+28-1}{28}$ خواهد بود.

نتیجه ۱: به طور کلی تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$ برابر است با $\binom{m-1}{k-1}$ (اگر $k > m$ آن گاه $\binom{m-1}{k-1} = 0$).

مثال ۴: برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32, x_1, x_2 \geq 5$ و $x_3, x_4 \geq 7$ به متغیرهای x_1 و x_2 عدد ۵ و به x_3 و x_4 عدد ۷ را نسبت می‌دهیم. لذا تعداد جوابهای معادله مذکور با شرایط فوق برابر است با تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ و این نیز برابر است با $\binom{11}{3}$ یا $\binom{4+8-1}{8}$.

نتیجه ۲: به طور کلی تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی با

شرط $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots, x_k \geq c_k$ برابر است با $\binom{m-c_1-c_2-\dots-c_k+k-1}{k-1}$.

مثال ۵: برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح $x_4 > 8$ ، $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$ و $x_1 > 5, x_2 > 6, x_3 > 7$ هریک از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 و x_4 به ترتیب اعداد ۶ و ۷ و ۸ و ۹ را نسبت می‌دهیم. بنابراین تعداد جوابهای معادله فوق با شرایط مذکور با تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$ برابر است و تعداد جوابهای این معادله نیز $\binom{21}{3} = \binom{4+18-1}{18}$.

مجاز نباشد (۱۰ کتاب منتخب متفاوت باشند)، برابر است با $\binom{20}{10}$.

مسئله ۴: به چند روش می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد، طوری که هر نفر حداقل یک سیب دریافت کند؟

حل: برای توزیع سیب‌ها، ابتدا به هر نفر یک سیب داده و سپس ۳ سیب باقیمانده را بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم، لذا این توزیع به $\binom{4+3-1}{3} = 20$ روش می‌تواند انجام شود، سپس ۶ پرتقال را به $\binom{9}{6} = 84$ روش بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم (برای مثال می‌توانیم ۶ پرتقال را به یک نفر بدهیم و به ۳ نفر دیگر پرتقال ندهیم). لذا طبق اصل ضرب $20 \times 84 = 1680$ راه برای توزیع میوه‌ها تحت شرایط مذکور وجود دارد.

معادلات خطی با ضرایب واحد

توجه: x عدد صحیح و غیرمنفی است را به صورت $x \geq 0$ و x عدد صحیح و مثبت است را به صورت $x \geq 1$ یا $x > 0$ (که x عدد صحیح است) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲: تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ با توجه به فرمول * برابر است با $\binom{10}{7} = \binom{4+7-1}{7} = 120$ توجه داریم به این که $(x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1)$ و

را جوابهای متفاوت گوئیم. $(x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 3)$ به طور کلی تنها جوابهایی را یکسان در نظر می‌گیریم، که مقادیر x_1 ها و x_2 ها و x_3 ها و x_4 های آن به طور همزمان برابر باشند.

(در وضعیتی که ۱۲ جواب این چینی درست مانند یک جواب رفتار کنند، جوابها تحت عنوان افزایش عدد ۷ می‌آیند، که در بخش بعد توضیح داده خواهد شد).

مثال ۳: برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله ① $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ ابتدا هریک از متغیرها عدد

می‌باشد.

قضیه (اصل طرد و شمول)

فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد که $|S| = N$ و c_i ($1 \leq i \leq t$) شرط یا خاصیتی باشد، که برای بعضی یا تمام اعضای S برقرار باشد و $\bar{N}$ یا $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_t)$ تعداد اعضای S باشد که هیچکدام از خواص فوق را نداشته باشد، آن گاه:

$$\begin{aligned} \bar{N} = & N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_t)] + \\ & [N(c_1 c_2) + \dots + N(c_1 c_t) + N(c_2 c_t) + \dots + \\ & N(c_2 c_t) + \dots + N(c_{t-1} c_t)] \\ & - [N(c_1 c_2 c_3) + N(c_1 c_2 c_4) + \dots + N(c_1 c_2 c_t) + \\ & N(c_1 c_3 c_4) + N(c_1 c_3 c_5) + \dots + N(c_1 c_3 c_t) + \dots + \\ & N(c_{t-2} c_{t-1} c_t)] + \dots + (-1)^t N(c_1 c_2 \dots c_t). \end{aligned}$$

$$\bar{N} = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_t) = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) + \dots + (-1)^t N(c_1 c_2 \dots c_t)$$

برای $1 \leq i \leq t$ ، $N(c_i)$ تعداد اعضای S است که در شرط c_i صدق می‌کند. اگر $i \neq j$ ، $N(c_i c_j)$ تعداد عناصری از S است که هر دو خاصیت c_i و c_j برای آنها برقرار است. اگر $1 \leq i, j, k \leq t$ سه عدد باشند که دویبدو مساوی نباشند، $N(c_i c_j c_k)$ تعداد اعضای S است که در هر سه خاصیت c_i و c_j و c_k صدق می‌کند.

نتیجه: اگر $N(c_1 \text{ or } c_2 \text{ or } \dots \text{ or } c_t)$ تعداد اعضای S باشد که حداقل یکی از خواص را داشته باشد، آن گاه

$$N(c_1 \text{ یا } c_2 \text{ یا } \dots \text{ یا } c_t) = N - \bar{N} = \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) + \dots + (-1)^{t-1} N(c_1 \dots c_t)$$

(با حالت خاص این نتیجه در کتاب «جبر و احتمال» آشنا شده‌اید).

مثال ۶: برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ با شرط $0 \leq x_i \leq 7$ برای $1 \leq i \leq 4$ را مجموعه جواب معادله $x_i \geq 0$ ، $1 \leq i \leq 4$ قرار می‌دهیم لذا

نتیجه ۳: به طور کلی تعداد جوابهای صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = m \text{ در شرایط } x_1 > c_1, x_2 > c_2, \dots, x_k > c_k \text{ برابر است با } \binom{m - c_1 - c_2 - \dots - c_k}{k-1}^{-1}$$

تذکر: گرچه در مثالهایی که به کار بردیم، اعداد صحیح $c_k, \dots, c_2, c_1$ همگی مثبت انتخاب شده بودند. ولی این نتایج برای اعداد صحیح منفی و صفر نیز قابل استفاده هستند.

مسئله ۵: تعداد جوابهای معادله

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت با شرط الف) $x_1 > 6$ ، ب) $x_1, x_2 > 6$ ، پ) $x_1, x_2, x_3 > 6$ به دست آورید.

حل: الف)

روش اول: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ،

طبق نتیجه ۳

$$x_1 > 6, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0 \Rightarrow \binom{20-6-1-1}{3} = \binom{13}{3}$$

تعداد جوابها

روش دوم: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ،

طبق نتیجه ۲

$$x_1 \geq 7, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \Rightarrow \binom{20-7-1-1-1+4-1}{3} = \binom{13}{3}$$

تعداد جوابها

ب) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ،

طبق نتیجه ۲

$$x_1 \geq 7, x_2 \geq 7, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \Rightarrow \binom{20-7-7-1-1+4-1}{3} = \binom{7}{3}$$

تعداد جوابها

پ) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ،

طبق نتیجه ۲

$$x_1, x_2, x_3 > 6, x_4 > 0 \Rightarrow \binom{20-6-6-6-1}{3} = \binom{1}{3} = 0$$

تعداد جوابها

نوشت که شامل کلمات، car، dog، pun، byte نباشد؟

حل: فرض می‌کنیم S مجموعه تمام جایگشت‌های متمایز ۲۶ حرف انگلیسی باشد. پس $|S| = N = 26!$. حال ci را با توجه به صورت مسأله تعریف می‌کنیم. گوییم یک جایگشت موجود در S در شرط c_1 صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت شامل کلمه «car» باشد. لذا $N(c_1)$ یعنی تعداد جایگشت‌هایی که با ۲۶ حرف انگلیسی می‌توان نوشت، هرگاه آن جایگشت شامل کلمه «car» باشد. به این منظور ۳ حرف موجود در این کلمه را یک حرف در نظر گرفته، با ۲۳ حرف باقیمانده تشکیل ۲۴ حرف خواهند داد، لذا $N(c_1) = 24!$ به همین ترتیب گوییم یک جایگشت در S در شروط c_2 و c_3 و c_4 صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت به ترتیب شامل کلمات شماره ۲ و ۳ و ۴ باشد. لذا $N(c_2) = 24!$ و $N(c_3) = 24!$ و $N(c_4) = 24!$. بنابراین برای یافتن جواب مسأله باید $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4)$ را محاسبه کنیم. $N(c_1 c_2)$ ، یعنی تعداد جایگشت‌های ۲۶ حرف انگلیسی که هم شامل «car» و هم شامل «dog» باشد و برای محاسبه آن ۳ حرف موجود در «car» را یک حرف و ۳ حرف موجود در «dog» را نیز یک حرف در نظر بگیریم. لذا $N(c_1 c_2)$ برابر است با تعداد جایگشت‌های این ۲ حرف و $20 = 26 - 6$ حرف باقیمانده یعنی $N(c_1 c_2) = 22!$. با روش مشابه خواهیم داشت

$$N(c_1 c_3) = N(c_2 c_3) = 22!$$

$$N(c_1 c_4) = N(c_2 c_4) = N(c_3 c_4) = 21!$$

$$N(c_1 c_2 c_3) = 20!$$

$$N(c_1 c_2 c_4) = N(c_2 c_3 c_4) = N(c_1 c_3 c_4) = 19!$$

$$N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 17!$$

$$\bar{N} = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4) = 26! - (3 \times 24! + 23!) +$$

$$(3 \times 22! + 3 \times 21!) - (20! + 3 \times 19!) + 17!$$

مسأله ۷: تعداد اعداد صحیح مثبت x را به طوری که

حل: با احتساب صفر به عنوان یک رقم هر عدد صحیح

بین ۱ تا ۹۹۹۹۹۹۹ را به صورت عددی که ۷ رقم دارد تعبیر می‌کنیم. به طور مثال عدد صحیح ۸۲۰۰ را می‌توان به صورت ۰۰۸۲۰۰ نوشت. اگر ۷ رقم را $x_7, \dots, x_1$ در نظر بگیریم،

$$|S| = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18} = 1330$$

گوییم یک جواب x_1, x_2, x_3, x_4 در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه برای $1 \leq i \leq 4$ ، $x_i > 7$ (یا $x_i \geq 8$) باشد. بنابراین برای حل مسأله باید $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4)$ (یعنی تعداد عناصری از S که در شروط $c_1, \dots, c_4$ صدق نمی‌کند) را محاسبه کنیم.

$N(c_1)$ یعنی تعداد جواب‌های معادله $x_1 \geq 8, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

لذا طبق نتیجه ۲ خواهیم داشت:

$$N(c_1) = \binom{18-8+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} \text{ یا } \binom{13}{10}$$

و به همین ترتیب $N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = \binom{13}{10}$.

$N(c_1 c_2)$ یعنی تعداد جواب‌های صحیح معادله

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, x_1, x_2 \geq 8, x_3, x_4 \geq 0$ ، لذا طبق

نتیجه ۲ خواهیم داشت:

$$N(c_1 c_2) = \binom{18-8-8+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} \text{ یا } \binom{5}{2}$$

و به همین ترتیب

$$N(c_1 c_3) = N(c_1 c_4) = N(c_2 c_3) = N(c_2 c_4) = N(c_3 c_4) = \binom{5}{2}$$

$$N(c_1 c_2 c_3)$$

یعنی تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1, x_2, x_3 \geq 8, x_4 \geq 0$

لذا $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ و چنین معادله‌ای جواب ندارد. لذا

$N(c_1 c_2 c_3) = 0$ و به همین ترتیب $N(c_1 c_2 c_4) = 0$ و نیز

$$1 \leq i < j < k \leq 4$$

لذا $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$

$$\bar{N} = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4) = |S| - \sum_{1 \leq i \leq 4} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} N(c_i c_j) -$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} N(c_i c_j c_k) + \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 4} N(c_i c_j c_k c_l) =$$

$$\binom{21}{18} - \binom{4}{1} \binom{13}{10} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} - \binom{4}{3} \times 0 + \binom{4}{4} \times 0 = 246$$

مسأله ۶: ۲۶ حرف انگلیسی چند جایگشت می‌توان

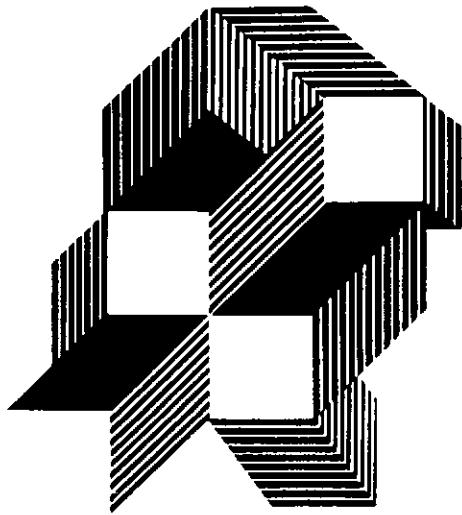
$$\bar{N} = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_7) = |S| - \sum_{1 \leq i \leq 7} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 7} N(c_i c_j) - \dots + (-1)^7 \sum_{1 \leq i < j < \dots < k \leq 7} N(c_i c_j \dots c_k)$$

$$\binom{37}{31} - \binom{7}{1} \binom{27}{21} + \binom{7}{2} \binom{17}{11} - \binom{7}{3} \binom{7}{1}$$

$$+ 0 - 0 + 0 - 0 = \binom{37}{31} - \binom{7}{1} \binom{27}{21} +$$

$$\binom{7}{2} \binom{17}{11} - \binom{7}{3} \binom{7}{1}$$

در این مسأله، برای تعیین N به ویژه از فرمولهای بدست آمده در نتایج استفاده نشده، تا چگونگی محاسبات به خوبی درک شود.



مسأله ۸: تعداد جوابهای صحیح معادله

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ را با شرط $3 \leq x_4 \leq 8$ محاسبه کنید.

$$S: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

حل:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N = \binom{19-3-3-3+1}{4-1} = \binom{16}{3}$$

c_i را با توجه به S و شرایط مسأله انتخاب می‌کنیم.

$$c_1(x_1 \geq 6): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

می‌توانیم مسأله را به صورت تعیین تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 31, 0 \leq x_i \leq 9, 1 \leq i \leq 7$ تعبیر کنیم.

S را مجموعه جواب معادله $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 7$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 31 \text{ را در نظر می‌گیریم، از}$$

$$|S| = \binom{7+31-1}{31} = \binom{37}{31}$$

برای $c_i, 1 \leq i \leq 7$ را شرط $x_i \geq 10$ در نظر می‌گیریم. لذا باید $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_7)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$c_1: x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 31, x_1 \geq 10, x_2, x_3, \dots, x_7 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 21, x_i \geq 0 \Rightarrow N(c_1) = \binom{27}{21}_{1 \leq i \leq 7}$$

$$N(c_i) = \binom{27}{21} \text{ داریم } 1 \leq i \leq 7$$

$$c_1 c_2: x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 31, x_1, x_2 \geq 10,$$

$$x_3, x_4, \dots, x_7 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 11, x_i \geq 0 \Rightarrow N(c_1 c_2) = \binom{17}{11}_{1 \leq i \leq 7}$$

$$\text{لذا برای } 1 \leq i < j \leq 7 \text{ داریم: } N(c_i c_j) = \binom{7}{11} \text{ (که تعدادشان،}$$

به‌طور کلی $\binom{7}{2}$ می‌باشد).

$$c_1 c_2 c_3: x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 31$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 10, x_4, \dots, x_7 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 1$$

$$x_i \geq 0 \Rightarrow N(c_1 c_2 c_3) = \binom{7}{1}_{1 \leq i \leq 7}$$

$$N(C_i C_j C_k) = \binom{7}{1} \text{ داریم } 1 \leq i < j < k \leq 7$$

(که تعدادشان $\binom{7}{3}$ می‌باشد).

تعداد جوابهای معادله با داشتن ۴ شرط و بیشتر نیز صفر می‌باشد، لذا:

$$= \binom{16}{3} - \left[\binom{10}{3} + \binom{9}{3} + \binom{11}{3} \right] + \left[\binom{5}{2} + 10 \right]$$

مسئله ۹: تعداد جوابهای معادله

$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 34$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بیشتر از ۱۰ محاسبه کنید:

حل: قرار می‌دهیم $x_i = 2y_i$ (برای $1 \leq i \leq 6$). لذا

برای حل معادله مذکور باید معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 17$

($1 \leq i \leq 6$) را حل کنیم. S را مجموعه جواب

معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 17$ ، $y_i \geq 1$ ، $y_i \leq 5$ ($1 \leq i \leq 6$) را شرط c_i و $y_i \geq 6$

برای $1 \leq i \leq 6$ در نظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت.

$$N(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_6) = \text{تعداد جوابهای معادله}$$

$$= \binom{16}{5} - \binom{6}{1} \binom{11}{5} + \binom{6}{2} \binom{6}{5}$$

مسئله ۱۰: اگر یک تاس ۱۲ بار پرتاب شود، احتمال

این که جمع اعداد ظاهر شده ۳۰ باشد، چیست؟

حل: S را مجموعه جواب معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 30$ ، $1 \leq x_i \leq 6$

را شرط c_i و $x_i \geq 7$ را شرط $\bar{c}_i$ و $x_i \geq 7$ را شرط $\bar{c}_i$ و $x_i \geq 7$ را شرط $\bar{c}_i$

برای $1 \leq i \leq 12$ در نظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت:

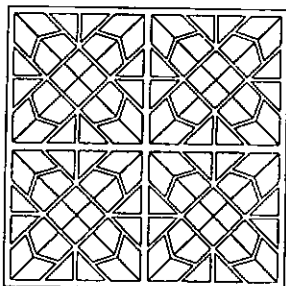
$$\bar{N} = \binom{29}{18} - \binom{12}{1} \binom{23}{12} + \binom{12}{2} \binom{17}{6} - \binom{12}{3}$$

لذا

$$P = \frac{\bar{N}}{6^{12}} = \frac{\binom{29}{18} - \dots - \binom{12}{3}}{6^{12}}$$

البته چنین معادلاتی با استفاده از تابع مولد نیز قابل حل

هستند: که در بخش مربوط به آن توضیح داده خواهند شد.



$$x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N(c_1) = \binom{19-6-3-3+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

$$c_2(x_2 \geq 7): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 7, x_3 \geq 3, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N(c_2) = \binom{19-7-3-3+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

$$c_3(x_3 \geq 8): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N(c_3) = \binom{19-8-3+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$$

$$c_4(x_4 \geq 9): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3, x_4 \geq 9 \Rightarrow$$

$$N(c_4) = \binom{19-3-9+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

$$c_1 c_2 (x_1 \geq 6, x_2 \geq 7): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

$$x_1 \geq 6, x_2 \geq 7, x_3 \geq 3, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N(c_1 c_2) = \binom{19-6-7-6+3}{3} = 1$$

$$c_1 c_3 (x_1 \geq 6, x_3 \geq 8): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19,$$

$$x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8, x_4 \geq 3 \Rightarrow$$

$$N(c_1 c_3) = \binom{5}{3}$$

با روش مشابه خواهیم داشت:

$$N(c_1 c_4) = N(c_2 c_3) = 4, N(c_3 c_4) = \binom{5}{2},$$

$$N(c_2 c_4) = 1$$

و نیز تعداد جوابهای معادله با داشتن ۳ شرط از شروط

c_i و بیشتر صفر می‌باشد، لذا

$$\text{تعداد جواب مسئله} = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4)$$

و $(1 \leq i < j < k < l \leq 5)$

$$\bar{N} = |S| - \sum_{1 \leq i \leq 5} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} N(c_i c_j c_k) +$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} N(c_i c_j c_k c_l) - N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5)$$

$$\text{و } (1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq 5) N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5) = 2^0$$

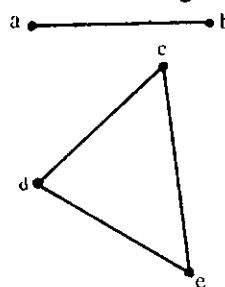
$$\begin{aligned} \bar{N} &= 2^{10} - \binom{5}{1} 2^6 + \binom{5}{2} 2^3 - \binom{5}{3} 2^1 \\ &+ \binom{5}{4} 2^0 - 2^0 = 768 \end{aligned}$$

مسأله ۱۱: تعداد جاده‌های دوطرفه بین ۵ روستا را،

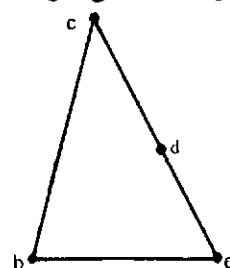
طوری که هیچ یک از آنها از بقیه روستاها جدا نباشند، محاسبه کنید:

حل: روستاها را با a و b و c و d و e نامگذاری

می‌کنیم. بنابراین باید تعداد گرافهای بی‌جهت روی ۵ رأس را که هیچ رأسی در آن تنها (ایزوله، منفرد) نیست، پیدا کنیم (هدف شمردن جاده‌هایی مثل شکل (۱) است نه شکل (۲)).



شکل ۱



شکل ۲

فرض می‌کنیم S مجموعه گرافهای بی‌جهت روی

$V = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. با توجه به این که تعداد جاده‌های

دوطرفه ممکن بین این ۵ روستا $\binom{5}{2} = 10$ می‌باشد و

برای هر جاده ۲ انتخاب وجود دارد (می‌تواند عضو S باشد یا نباشد)، لذا $N = |S| = 2^{10}$ برای $1 \leq i \leq 5$ را شرط این که

روستای a از بقیه جدا باشد در نظر می‌گیریم. پس $N(c_1)$ یعنی تعداد گرافهای $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5)$ مجهول است. بی‌جهت روی a که روستای a از بقیه روستاها جدا باشد.

تعداد جاده‌های ۲ طرفه بین ۴ روستای دیگر $\binom{4}{2} = 6$ می‌باشد،

لذا $N(c_1) = 2^6$ و به همین ترتیب برای $1 \leq i \leq 5$ ، $N(c_i) = 2^6$.

$N(c_1 c_2)$ یعنی تعداد گرافهای بی‌جهت روی V طوری

که روستاهای a و b با هیچ روستایی ارتباط نداشته باشند. تعداد

جاده‌های دوطرفه بین ۳ روستای باقیمانده $\binom{3}{2} = 3$ می‌باشد لذا

$N(c_1 c_2) = 2^3$. به این ترتیب (برای $1 \leq i < j \leq 5$)

با روش مشابه نتیجه خواهد شد (برای $1 \leq i < j < k \leq 5$)

$N(c_1 c_2 c_3) = 2^1$ و نیز $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 2^0$ (برای

