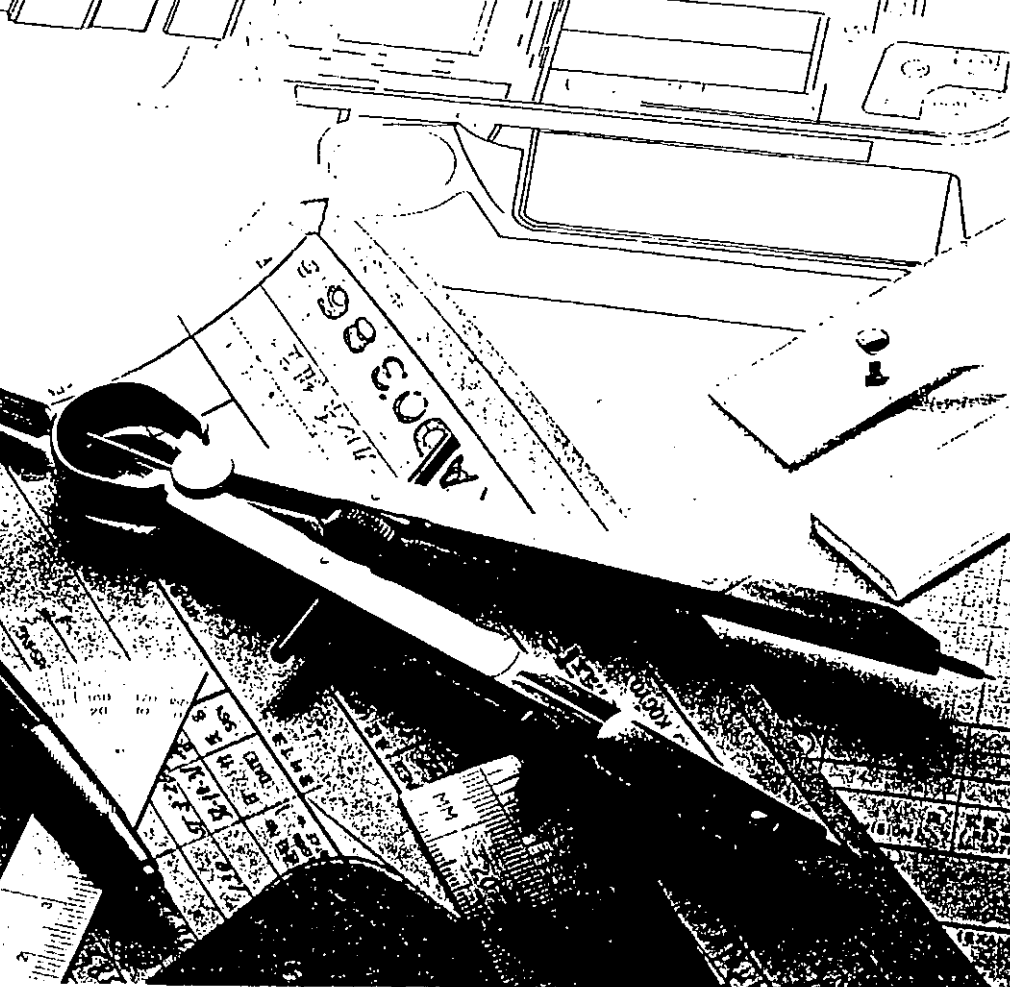


تربیت خلاقیت ریاضی [در دبیرستان]

• پرویز شهریاری



ریاضی، شرط لازم و کافی برای موفق شدن در هر امتحان و مسابقه‌ای است، گرچه برخی گمان می‌کنند که می‌توان بدون آن‌هم، موفقیت‌هایی به‌دست آورد. شاید این دیدگاه، برای برخی موفقیت‌های زودگذر، درست باشد، ولی بی‌تردید، برای درازمدت و برای کسی که می‌خواهد ریاضی را به درستی دریابد، نادرست است و سرانجام، موجب ناکامی می‌شود.



یکی از راه‌های رسیدن به ذهن فعال و کاوشگر در زمینه ریاضیات، تجزیه و تحلیل مسأله و کاوش در مفهوم‌ها و مسأله‌های پیرامون آن است. وقتی یک مسأله را حل می‌کنید، تلاش کنید، به این پرسش‌ها و پرسش‌های مشابه آن پاسخ بدهید: - آیا عکس مسأله درست است؟

- آیا در مسأله، شرط یا شرط‌های اضافی وجود دارد، یعنی آیا می‌توان حکم مسأله را با فرض‌های کمتری ثابت کرد؟
- حائله‌های خاص مسأله کدام‌اند؟
- آیا می‌توان مسأله را تعمیم داد؟ و اگر پاسخ مثبت است، به چه صورت‌هایی؟

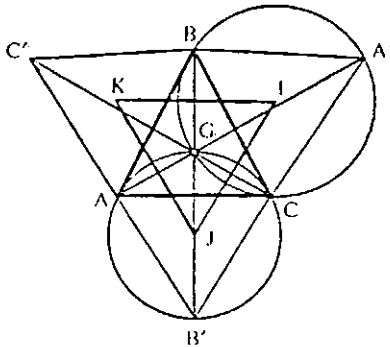
اگر بخواهید، می‌توانید ذهن ریاضی خود را تربیت کنید و نیروی خلاق خود را در زمینه ریاضیات (که به‌صورتی پنهانی، در همه شما وجود دارد) ظاهر کنید و تکامل دهید. برای گام‌نهادن در این راه، چند شرط بنیادین وجود دارد:

(۱) به ریاضیات علاقه‌مند باشید و در راه رسیدن به خلاقیت ریاضی، بخشی از وقت و انرژی خود را به کار ببرید:

(۲) به این باور رسیده باشید که ریاضیات، کمتر به حافظه و بیشتر به اندیشه نیاز دارد؛ اندیشه منطقی، که در سرشت همه شما به‌طور طبیعی نهاده شده است:

(۳) در ساعت‌هایی که خارج از کلاس به مطالعه و یا تمرین مسائل ریاضیات می‌پردازید، خود را از دغدغه برنامه کلاس، کتاب درسی، امتحان و به‌ویژه کنکور آزاد کنید؛ به‌خاطر درک واقعی مفهوم‌ها و استدلال‌های ریاضی کار کنید، نه به دلیل تکلیفی که به عهده شما گذاشته شده است و یا به دلیل نمره‌ای که بعد از امتحان یا شرکت در مسابقه و کنکور انتظار دارید. البته، باید به این حقیقت روشن هم اعتقاد داشته باشید که ورود در ژرفای ریاضیات و درک کامل مفهوم‌های ریاضی، به‌خودی خود، شما را در امتحان‌ها و کنکور هم موفق می‌کند. خلاقیت

مسأله مشهوری است و در بسیاری از کتابهای هندسه آمده است. حل آن هم دشوار نیست؛ در این جا یکی از راه حلها را می آوریم.



شکل ۱

مثلث مفروض را ABC ، رأسهای سوم مثلثهای متساوی الاضلاع را A' ، B' و C' و مرکزهای مثلثهای متساوی الاضلاع را I ، J و K می نامیم (شکل ۱). ثابت می کنیم، هریک از زاویه های داخلی مثلث IJK ، برابر با 60° درجه است. دایره های ACB' (به مرکز J) و BCA' (به مرکز I) یکدیگر را در نقطه های C و G قطع کرده اند. داریم:

$$\widehat{AGC} = 180^\circ - \widehat{AB'C} = 120^\circ;$$

$$\widehat{BGC} = 180^\circ - \widehat{BA'C} = 120^\circ$$

بنابراین $\widehat{AGB} = 120^\circ$ ، یعنی

$$\widehat{AGB} + \widehat{AC'B} = 180^\circ$$

و دایره ABC' (به مرکز K) هم، از نقطه G می گذرد. سپس $IJ \perp CG$ و $IK \perp BG$ (خط راستی که از مرکز دو دایره بگذرد، بر وتر مشترک دو دایره عمود است) و چون $\widehat{BGC} = 120^\circ$ پس $\widehat{IKJ} = 60^\circ$. به همین ترتیب، ثابت می شود: $\widehat{IJK} = 60^\circ$ و $\widehat{JKI} = 60^\circ$ ، یعنی مثلث IJK متساوی الاضلاع است.

در حالتی هم که، نقطه G ، در بیرون مثلث ABC باشد، می توان با روشی مشابه، استدلال کرد.

اکنون به تجزیه و تحلیل حل مسأله می پردازیم:

(۱) با اندک دقتی معلوم می شود که خط راست CG ، زاویه AGB را نصف می کند (ثابت کنید!) و می توان نتیجه گرفت که خط راست CG ، از نقطه C' وسط کمان AB از دایره ABC'

— چه مسأله هایی با این مسأله شباهت دارند؟

— اگر با مسأله ای از هندسه روی صفحه سر و کار دارید، چه هم ارزهایی در فضا پیدا می کند؟ یا اگر قانونی را درباره عددهای درست ثابت می کنید، درباره عددهای مختلط درست، چگونه می شود؟ درباره چند جمله ای های درست چه طور؟ ...

این پرسش ها را می توان باز هم ادامه داد. خود مسأله ما را در انتخاب پرسشها راهنمایی می کند، بنابراین، بسته به نوع مسأله، جستجوی ما می تواند گسترده تر یا محدودتر باشد. تنها به یاد داشته باشید که اگر فقط یک مسأله را به طور کامل حل کنید و به اصطلاح «ته آن را در آورید» بسیار سودمندتر از آن است که ده ها مسأله را برای شما حل کنند یا از روی کتابهای حل مسأله فرا بگیرید. نکته آخر این که، اگر به پرورش ذهن ریاضی خود علاقه مندید، باید به خودتان اعتماد داشته باشید، از این که مسأله ای به سادگی تسلیم نمی شود، نهراسید. دوباره به آن «حمله» کنید و مطمئن باشید، اگر آن دژ قابل گشودن باشد سرانجام به دست شما گشوده خواهد شد... حتی اگر موفق به فرو ریختن برج و باروی «مستحکم» دژ نشوید، می توانید در «دیوارهای» آن رخنه کنید و ضمن این رخنه، به بسیاری نکته های جانبی دست یابید.

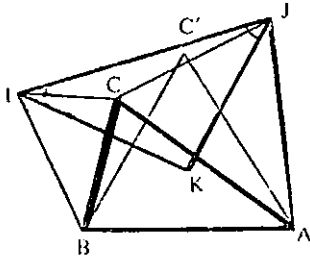
هیچ چیز بهتر از مثال، مطلب را روشن نمی کند. در این مقاله، برای این که مطلب دراز نشود، تنها به یک مسأله پرداخته ایم؛ تازه در این مسأله هم، به جستجوی همه جانبه نرفته ایم و تنها به برخی از آنها پرداخته ایم. به عنوان نمونه، مسأله را (که یک مسأله ساده از هندسه مسطحه است) به فضا نبرده ایم که مثلاً، اگر به جای مثلث، یک چهاروجهی و به جای مثلث متساوی الاضلاع، یک چهاروجهی منتظم داشته باشیم، چه می شود! در خود هندسه مسطحه هم، خیلی دور نرفته ایم و به حالت های کم و بیش بغرنج نپرداخته ایم. در واقع، خواسته ایم نمونه ای بیاوریم که بتواند تا حدی راهنمای شما ریاضیدان های آینده باشد. چه بسا باز هم فرصتی پیش آید و بتوانیم نمونه های دیگری را در برابر شما قرار دهیم.

□

مسأله: روی ضلع های یک مثلث غیر مشخص و در بیرون آن، مثلث های متساوی الاضلاع ای ساخته ایم. ثابت کنید، مرکزهای این مثلث ها، رأس های یک مثلث متساوی الاضلاع اند.

می‌گذرد. به همین ترتیب، خط‌های راست AG و BG ، به ترتیب از نقطه‌های B' و A' می‌گذرند. به این ترتیب، مسئله دیگری ثابت می‌شود:

می‌شود.

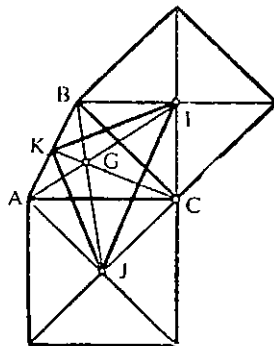


شکل ۲

به نکته دیگری هم توجه کنیم: نقطه‌های I و J و K ، در این جا بر مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC'' ، BCA'' و CAB'' و ABC'' منطبق‌اند، به شرطی که A'' در یک طرف BC ، B'' در یک طرف AC و C'' در یک طرف AB باشند (چهارضلعی $AA''BA''$ و چهارضلعی‌های شبیه آن قابل محاط در دایره‌اند). با همین استدلال، مسئله اصلی را، به این صورت هم می‌توان تنظیم کرد:

مسئله ۴: اگر مثلث‌های ABC' ، CAB' ، BCA' و ABC' را، با زاویه‌های ۱۲۰° درجه در رأس‌های A' ، B' و C' طوری رسم کنیم که A و A' در یک طرف BC ، B و B' در یک طرف AC و C و C' در یک طرف AB واقع باشند، آن وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

(۴) اکنون به بررسی بعضی حالت‌های خاص می‌پردازیم.



شکل ۳

مسئله ۱: روی ضلع‌های مثلث غیر مشخص ABC و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع CAB' ، BCA' و ABC' را ساخته‌ایم. ثابت کنید، خط‌های راست AA' ، BB' و CC' از یک نقطه می‌گذرند و در آن جاشش زاویه برابر تشکیل می‌دهند (هرکدام برابر ۶۰° درجه).

مسئله ۲: اگر بار دیگر، راه حل مسئله را مرور کنیم، متوجه می‌شویم که از شرط مربوط به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌های CAB' ، BCA' و ABC' استفاده نکردیم. تنها چیزی که ضمن حل مسئله، مورد استفاده قرار گرفت، این بود که «هریک از زاویه‌های رأس‌های A' ، B' و C' ، برابر ۶۰° درجه است». بنابراین، در مسئله اصلی، می‌توان فرض را «ضعیف‌تر» و مسئله را به این صورت تنظیم کرد:

مسئله ۲: اگر روی ضلع‌های مثلث غیر مشخص ABC و در بیرون آن، مثلث‌های CAB' ، BCA' و ABC' را با زاویه برابر ۶۰° درجه در رأس‌های A' ، B' و C' بسازیم، آن وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

(۳) مسئله را می‌توان باز هم تعمیم داد. با اندکی تلاش، می‌توانید درستی مسئله زیر را ثابت کنید:

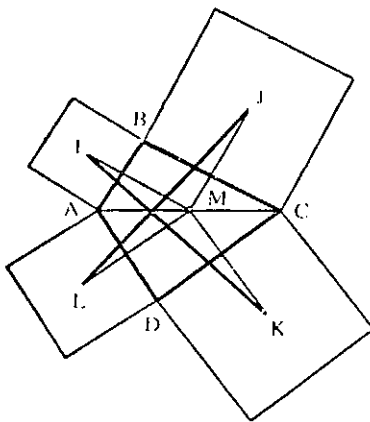
مسئله ۳: اگر روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های CAB' ، BCA' و ABC' را با این شرط بسازیم که داشته باشیم:

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ$$

آن وقت، مثلث IJK (که I ، J و K مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها هستند)، زاویه‌هایی برابر $\hat{A}'$ ، $\hat{B}'$ و $\hat{C}'$ خواهد داشت.

در حالت خاص $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = 60^\circ$ ، همان مسئله ۲ به دست می‌آید. همچنین می‌توان ثابت کرد: اگر $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 360^\circ$ ، آن وقت زاویه‌های مثلث IJK برابر

حالا صورت مسأله را اندکی تغییر می دهیم و به جای واژه «مثلث» از واژه «چهارضلعی» استفاده می کنیم. در شکل ۸ دیده می شود، چهارضلعی IJKL مربع نیست، یعنی با تبدیل مثلث به چهارضلعی و با تبدیل مثلث های متساوی الاضلاع به مربع، نتوانستیم به نتیجه ای شبیه مسأله اصلی برسیم. ولی آیا چهارضلعی IJKL، ویژگی دیگری ندارد؟ اگر از مسأله ۵ استفاده کنیم، به سادگی ثابت می شود که قطرهای چهارضلعی IJKL برهم عمودند و طول هایی برابر دارند.



شکل ۸

در واقع، اگر وسط قطر AC را M بنامیم، مثلث های IMI و KML، قائم الزاویه و متساوی الساقین اند (مسأله ۵). بنابراین، با دوران به مرکز M و به اندازه زاویه ۹۰ درجه، مثلث MLI بر مثلث MIK منطبق می شود، یعنی $(IK) \perp (IL)$ ، $|IK| = |IL|$ به این ترتیب، مسأله تازه ای به دست می آید:

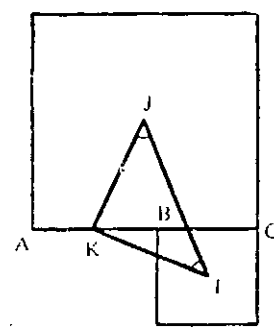
مسأله ۸: اگر روی ضلع های یک چهارضلعی غیر مشخص و در بیرون آن، مربع هایی رسم کنیم، آن وقت مرکزهای این مربع ها، رأس های یک چهارضلعی اند که قطرهای آن برهم عمودند و طول هایی برابر دارند.

توجه به حالت های خاص مسأله ۸، جالب است. اگر ABCD متوازی الاضلاع باشد، نقطه M در محل برخورد قطرهای آن خواهد بود و مسأله ای شبیه مسأله اصلی مثلث به دست می آید.

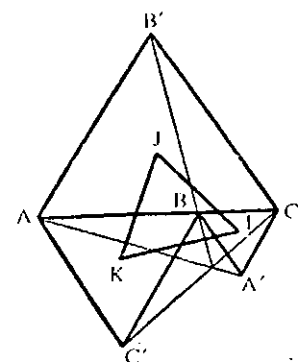
مسأله ۹: روی ضلع های یک متوازی الاضلاع و در بیرون آن، مربع هایی ساخته ایم. ثابت کنید که مرکزهای این

مسأله ۵: به ازای $\hat{A}' = \hat{B}' = 45^\circ$ و $\hat{C}' = 90^\circ$ ، مثلث IJK، قائم الزاویه و متساوی الساقین است. در این حالت می توان I و J را مرکز مربع هایی دانست که روی ضلع های BC و AC ساخته شده اند و K وسط ضلع AB است (شکل ۳).

مسأله ۶: اگر $\hat{A}' = \hat{B}' = 30^\circ$ و $\hat{C}' = 120^\circ$ ، آن وقت مثلث IJK متساوی الساقین و با زاویه رأس K برابر 120° درجه خواهد بود (شکل ۲). در این جا، I و J، رأس های مثلث های متساوی الاضلاعی هستند که روی ضلع های BC و CA و در بیرون مثلث ساخته شده اند و K مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC' است که روی AB طوری ساخته شده است که C و C' در یک طرف AB باشند.

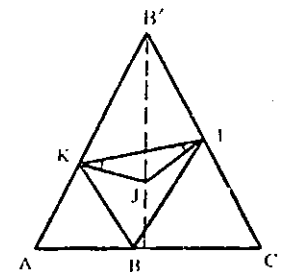


شکل ۵

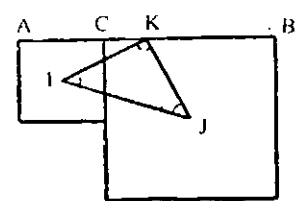


شکل ۴

مسأله ۷: حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن زاویه های B و C از مثلث ABC برابر صفر باشند، یعنی نقطه های A، B و C روی یک خط راست قرار گیرند. این حالت را روی شکل های ۴ تا ۷ نشان داده ایم. شکل ۴ حالت خاص شکل ۱، شکل های ۵ و ۶ حالت های خاص شکل ۳ و شکل ۷ حالت خاص شکل ۲ است.

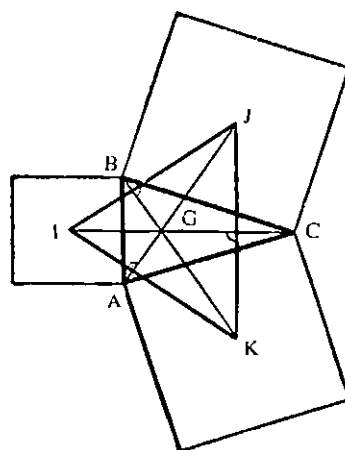


شکل ۷

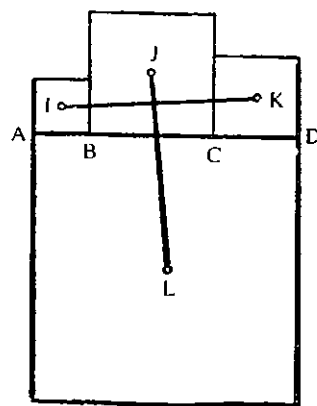


شکل ۶

مسأله ۱۰: روی ضلع‌های یک مثلث غیر مشخص و در بیرون آن، مربع‌هایی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که ارتفاع‌های مثلثی که رأس‌های آن، مرکزهای این مربع‌هاست، از رأس‌های مثلث مفروض می‌گذرند (شکل ۹).



مسأله ۱۱: می‌توان حالت خاصی را در نظر گرفت که نقطه‌های A، B، C و D بر یک خط راست واقع باشند. در این صورت شکل‌های ۱۰ و ۱۱ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۸) و شکل ۱۲ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۹) به‌دست می‌آیند.



شکل ۱۰