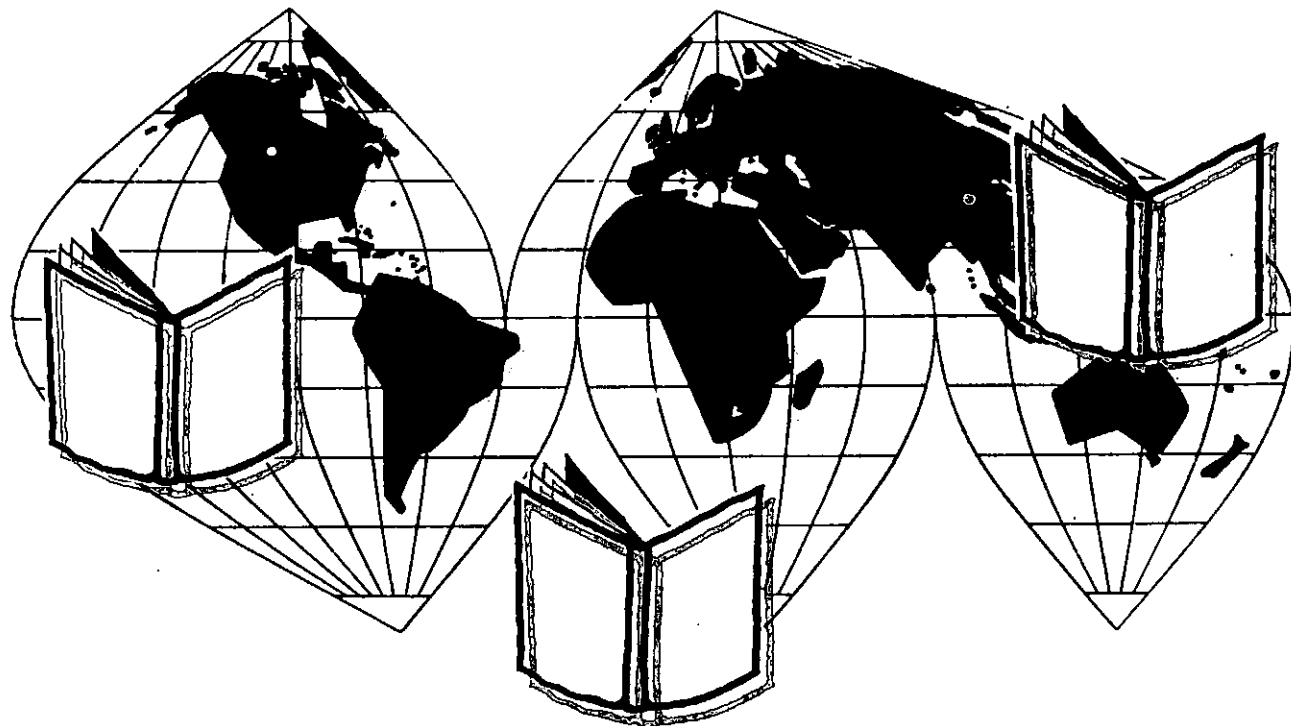




مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۵)

تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

از: Adrian Oldknow
The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

(قسمت سوم)

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

$$X' = (1, 1-2e, 1-2f) = I - 2D$$

$$P' = (1-2d, 1-e, 1-f)$$

$$S' = (1-d, 1-e, 1-f) = I - G$$

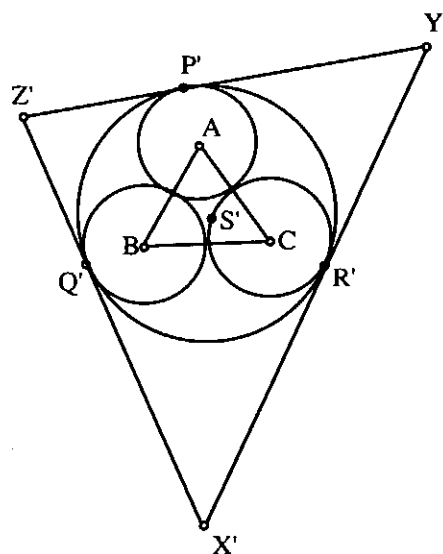
$$O' = (1-2d, 1-2e, 1-f) = I - 2G$$

$$1/t' = 2/r - 1/a' - 1/b' - 1/c' \quad (A)$$

و غیره

تا این مرحله، با دایره درونی سدی سروکار داشته‌ایم. البته در این مورد، انتظار مجموعه‌ای از نتایج ساده و مشابه متناظری را برای دایره برون سدی (شکل ۸)، S' ، مرکز آن، نقاط تماس P' ، Q' ، R' ، رأسهای مماس x' ، y' ، z' ، O' ، مرکز پرسپکتیو و شعاع t' داریم، و در این انتظار، نیز ناامید نمی‌شویم!

بنابراین، بسادگی ملاحظه می‌شود که خط سدی «Soddy line» شامل چهار نقطه دیگر O' ، O ، G ، I است که در آن، هریک از آنها مرکز پرسپکتیو جفت‌های مربوطه از مثلث‌های (ABC, xyz) ، (ABC, DEF) ، (DEF, xyz) و $(ABC, x'y'z')$ است. اما برای مطرح شدن ۶ مثلث داریم - ۳ مثلث مماس ABC ، xyz ، $x'y'z'$ و ۳ مثلث تماس DEF ، PQR و $P'Q'R'$ - و بنابراین، برای بررسی، ۱۵ جفت موجودند. چند دقیقه‌ای استفاده از نرم‌افزار هندسی مورد بحث، چهار نقطه دیگر K ، K' ، M و M' را بر خط سدی آشکار می‌کند،



شکل ۸

که h آن در (۷) تعریف شده است و اکنون می توان ملاحظه کرد که خط IG را به طور درونی به نسبت $r:h$ تقسیم می کند؛ درحالی که S' خط IG را به طور برونی، به همین نسبت تقسیم می نماید. گفته می شود که چهار نقطه $S'ISG$ تشکیل دسته همساز «harmonic range» می دهند و محقق است که خط $S'D$ ، با داشتن آنها غنی است!

با استفاده از استدلالی مشابه فوق، به جای سه خطیهای تبدیل شونده به دقیقهها، بسادگی می توان نشان داد که چهار نقطه K, M, L, N ، که به ازای آنها رابطه

$$L = K + \lambda M, \quad N = K - \lambda M$$

بین اختیارهایشان موجود است، نیز در دسته همسازند. بنابراین S, I, G را می توان به صورت $I, I-G, I, I+G$ و S' نوشت و دسته مورد بحث آشکار است. ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را نشان دهد که I, S, O, G, X, D, X' نیز چنین دسته های همسازی هستند.

با تحقیقی جامع بین ده نقطه ای که تاکنون برخط سدی شناسایی کرده ایم، ۲۲ دسته همساز به دست آورده ام. در این موارد، از محاسبه های نسبتاً ظریفی استفاده می کنند که توسط K, S, I و O توضیح داده شده اند. داریم:

$$K = I + \frac{1}{3}G, \quad S = I + G, \quad O = I + \frac{2}{3}G$$

$$S = \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}I \quad \text{بنابراین:}$$

$$O = \frac{3}{2}K - \frac{1}{2}I \quad \text{و}$$

و از آن جا که با انتخابها سروکار داریم، موارد

$$S = K + \frac{1}{3}I$$

$$O = K - \frac{1}{3}I \quad \text{و}$$

را داریم و دسته مورد نظر به صورت

$$I, K + \frac{1}{3}I, K, K - \frac{1}{3}I$$

مشخص می شود.

قضیه دزارگ «Desargues» بر این است که دو مثلث مثل ABC و DEF ، که مرکز پرسپکتیوی در نقطه ژرگون G دارند، دارای محور پرسپکتیو «axis of Perspective» نیز هستند. دو ضلع متناظر BC و EF از این دو مثلث در نقطه D' واقع بر BC

که همان طور که در جدول زیر نشان داده ایم، مراکز پرسپکتیوند:

	DEF	PQR	XYZ	P'Q'R'	X'Y'Z'
ABC	G	S	O	S'	O'
DEF		O	I	O'	I
PQR			K	I	M
XYZ				M'	I
P'Q'R'					K'

در این جا

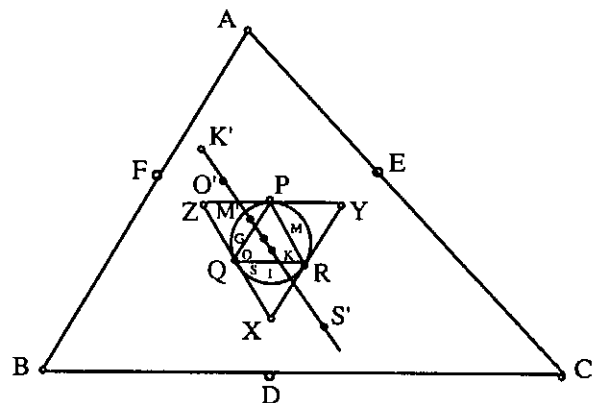
$$K = I + \frac{1}{3}G, \quad K' = I - \frac{1}{3}G, \quad M = I + \frac{2}{3}G$$

$$M' = I - \frac{2}{3}G$$

و بنابراین نقاط $S'ISKOMGM'O'K'$ با پارامترهای $-1, 0, 1, \frac{4}{3}, 2, 4, \infty, -4, -2, -\frac{4}{3}$ در امتداد خط سدی (شکل ۹) که معادله

$$(f-e)x + (d-f)y + (e-d)z = 0$$

را داراست، مرتبط اند.



شکل ۲

با این اطلاعات، ترسیمهای ساده ای برای دایره برونی سدی داریم. خط IP را رسم می کنیم تا بار دیگر دایره سدی O_A را در P' قطع کند و غیره. در این صورت S' تقاطع $P'A$ و $Q'B$ و $R'C$ است. مماس در P' بر $P'A$ عمود است و امتداد IE را در Y' قطع می کند و غیره.

اگر S, G, I, S' را با سه خطیهای دقیق I, G, S, S' نمایش دهیم، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\underline{S} = \frac{h}{(h+r)}\underline{I} + \frac{r}{(h+r)}\underline{G}$$

$$\underline{S'} = \frac{h}{(h-r)}\underline{I} - \frac{r}{(h-r)}\underline{G}$$

$T = I - KG$ تلاقی می کنند که در آن

$$K = \sqrt{3}(\sqrt{d} + \sqrt{e} + \sqrt{f})$$

قبلاً تذکر دادیم که به بسیاری از نقاط و خطوط مثلث، اسم تخصیص داده ایم. اعتقاد ندارم که خط سدی معروف باشد؛ اما امیدوارم نشان داده باشم که باید چنین باشد. این را نیز نمی دانم که خط زرگون پیش از این، از این طریق خاص شناخته شده باشد؛ اما خواننده ای که تصویری از چند ضلعیهای کامل را در کتابهای هندسه تصویری ملاحظه کرده باشد، می تواند

F' و E' و D' و C و B و A

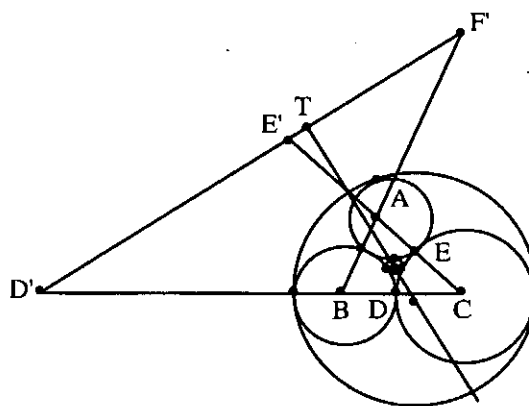
را به جا آورد.

مشخص شده است که خطوط سدی و اوپلر در نقطه جالب L ، به نام نقطه لانگ چمپ «de longchamps point» تلاقی می کنند؛ چنانکه نقطه وسط L و محل تلاقی ارتفاعات «orthocentre» h مرکز دایره محیطی مثلث یا O است. در این مورد، نمی توان یک چنین نتیجه جالبی درباره رأس سوم V از مثلث قائم الزامیه اوپلر، سدی، زرگون TVL به دست آورد؛ ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را بررسی کند که، در صورتی که ABC متساوی الساقین باشد، چه اتفاقی برای نقاط و خطوط مورد بحث می افتد، و در صورتی که به مثلث متساوی الاضلاع تغییر شکل دهد، چه اتفاقی به طور خودبه خود، در این باره رخ می دهد.

اکنون موضوع کوچک ۱۰ نقطه O, O', K, K', M ، M', D', E', F' و T را داریم، و در صورتی که قبلاً مطرح نشده باشد، مایلیم T را به عنوان نقطه فلچر «Fletcher point»، D', E', F' را به عنوان نقاط نابز «Nobbs points»، M را به عنوان نقاط گریفیث «Griffiths points» و K, K' را به عنوان نقاط درونی و برونی ریگ بای «Rigby» پیشنهاد و انجام کارهای باقیمانده را که کم هم نیستند، به خواننده واگذار کنم.



تلاقی می کنند و نقاط مشابه E', F' نیز موجودند. این سه نقطه جدید، یعنی D', E', F' ، در محور پرسپکتیو مربوط به دو مثلث مربوطه، همخط اند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

انتخابهای سه خطی این نقاط نیز بسیار ساده اند:

$$D'(\circ, e, -f), E'(-d, \circ, f), F'(d, -e, \circ)$$

با به خاطر آوردن این مطلب که D و C, B انتخابهای سه خطی $(\circ, e, f), (\circ, \circ, 1), (\circ, 1, \circ)$ را دارند، آن گاه:

$$D = eB + fC, D' = eB - fC$$

و بنابراین D', B, C ، در دسته همسازند و غیره.

می توانیم محور $D'E'F'$ را خط زرگون «Gergonne line» بنامیم. معادله این خط عبارت است از:

$$xef + yfd + zde = \circ$$

در واقع ضلعهای $BC, EF, QR, YZ, Q'R', Y'Z'$ از D' می گذرند و بنابراین، هریک از ۱۵ جفت مثلثی که مراکز پرسپکتیو شان بر خط سدی مربوط واقع اند، خط زرگون را به عنوان محور پرسپکتیو دارد. سامرویل «Somnerille» [8] شرط زیر را، برای این که خطهای $px + qy + rz = \circ$ و $p'x + q'y + r'z = \circ$ برهم عمود باشند، به دست داده است:

$$pp' + qq' + rr' = (qr' + rq') \cos A$$

$$+(rp' + pr') \cos B + (pq' + qp') \cos C$$

استفاده از فرمول کسینوسها و یورش سختی با درایو، نشان می دهد که خطهای سدی و زرگون متعامدند. آنها در نقطه