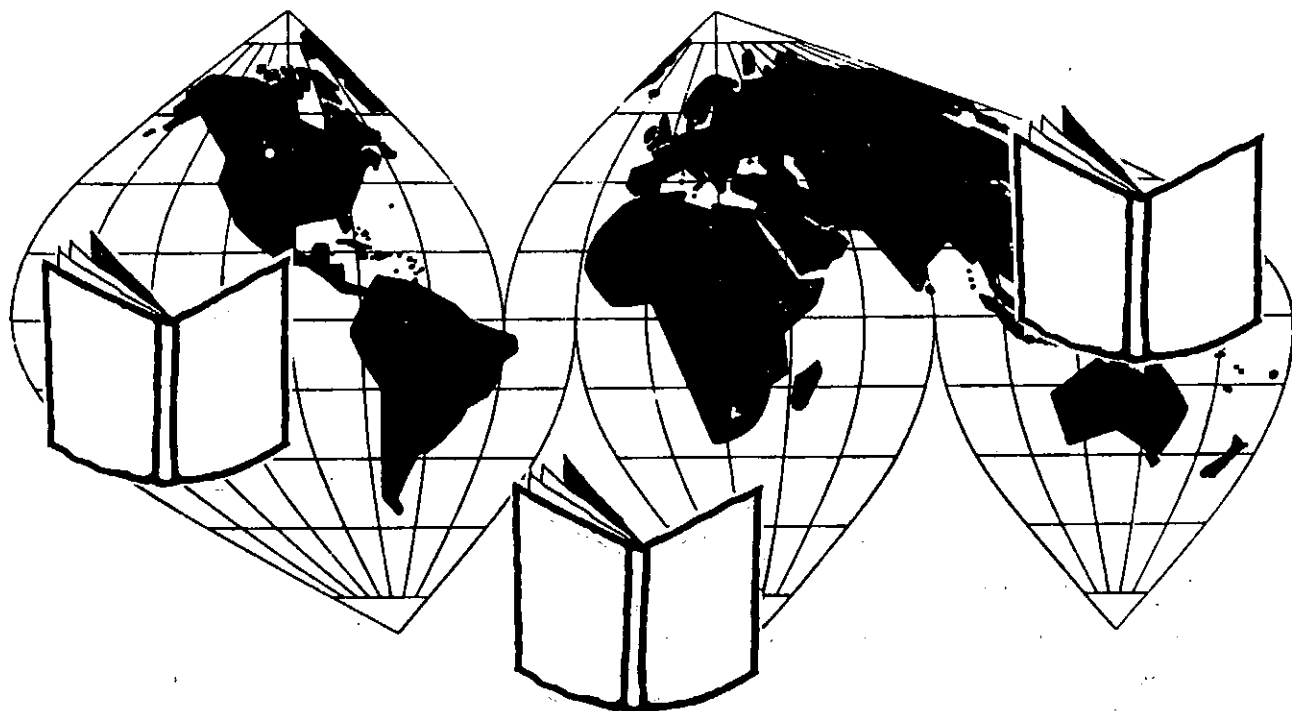




مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۳)

تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

Adrian Oldknow
The Mathematical Gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

● ترجمه: غلامرضا پاسبی پور

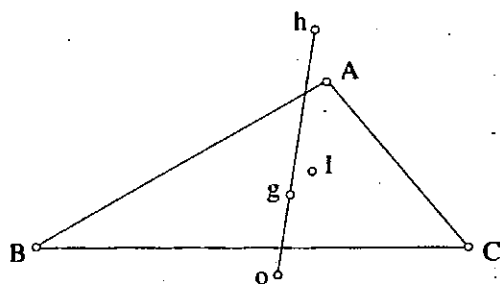
این مقاله، کاربرد تعدادی از ابزارهای کامپیوتری را در تحقیقات هندسی، همراه با نمایش جبری مناسب اجزای وابسته به مثلث، بررسی می‌کند. این روشها، برای به دست آوردن نتایج جدید، در هندسه مثلث به کار رفته است. مقاله با صورتی تعمیم یافته از مقاله داده شده در کنفرانس ۱۹۹۴ «ایستر»، با نام و نشان زیر است:

How do computers change the way we do mathematics?

Association's 1994 Easter Conference

آدمی، در پاسخ این پرسش می‌ماند که چه چیزی بیش از هندسه محنتش مثلث، که زمانی در مرکز توسعه ریاضیات و برنامه آموزشی قرار داشته، بیگانه‌تر از کامپیوتر فراگیر در همه جای دیگر بوده است؟

امروزه، نرم افزارهایی کامپیوتری موجودند که ترسیمات کلاسیک خط کش نامدرج و پرگار را انجام می‌دهند. در این مورد، می‌توان ترسیمهای یفرنجی را انجام داد و اشکال حاصل را برای کمک به تجسم هرگونه تغییرناپذیری موجود، تغییر شکل داد. در این باره Cabri Géomètre [1]، از فرانسسه، و



شکل ۱

در شکل ۱، I، مرکز دایره محاطی داخلی، g، مرکز ثقل، o، مرکز دایره محیطی و h، محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC را در یک نمودار، برای به دست آوردن روابطشان با یکدیگر، در نظر

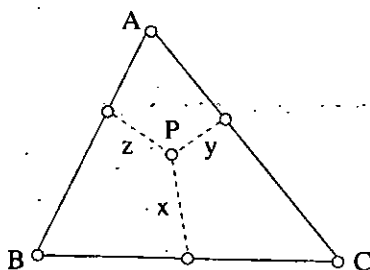
بردارهاست. به بردارهای A، B و C با مبدئی دلخواه، می توان بردارهای مکانی "position vector"، a، b و c را نسبت داد و در این صورت، عبارت ظریف زیر را برای مرکز ثقل خواهیم داشت:

$$g = (a + b + c)/3$$

اما متأسفانه، این کار خیلی سریع، با گرفتاریهای بسیار مواجه می شود!

دستگاه متعارف مختصات دوبعدی دکارتی نیز با تقارن ذاتی و «سه تایی بودن» "threeness" مثلث در تعارض است. در این مورد، گرچه می توان نتایجی را با زحمت به دست آورد؛ اما نتایج به دست آمده، بندرت بصیرتی به دست می دهند. گاهی اوقات در نظر گرفتن صفحه به عنوان نمودار «آرگاند» "Argand diagram" و نمایش نقاط به صورت اعداد مختلط در صورت قطبی، با ارجاع به مبدئی معین سودمند است. به عنوان مثال، با مرکز دایره محیطی به عنوان مبدأ و شعاع دایره محیطی به صورت یک، می توانیم سه زاویه دلخواه را اختیار کرده، A را به صورت e^{ia} و غیره بنویسیم. اما این دستگاه نیز به آسانی به عبارتهای مفصل منجر می شود. [تبصره: اختصار و غیره در مواقعی به کار می رود که عبارتهای مشابهی موجودند که صورتشان واضح است.] دستگاه مختصاتی که برای پیشنهاد، مناسبترین دستگاه به نظر می رسد، دستگاه همگن یا متجانس "homogeneous" است. کاکسیتز "Coxeter" [7] بر این باور است که «اختراع دستگاههای مختصات همگن توسط موبیوس "Möbius" یکی از دیرپای ترین مفاهیم در تاریخ ریاضی و قابل مقایسه با اختراع حساب دیفرانسیل لایب نیتز "Leibniz" است.»

در یک دستگاه سه خطی "trilinear" نقطه P واقع در صفحه مثلث مرجع ABC به طور دقیق دارای مختصات سه خطی "trilinear coordinates" (x, y, z) است که در آن، x فاصله P از ضلع BC و غیره است (شکل ۲). این فاصله مثبت اختیار می شود؛



شکل ۲

می گیریم. I به عنوان تقاطع نیمسازهای داخلی زوایای مثلث مشخص شده، g برخورد میانه هاست (میانه، یعنی، از A به نقطه وسط BC)، o برخورد عمود منصفهای اضلاع مثلث و h تلاقی ارتفاعات آن است (ارتفاع، یعنی، عمود از A بر BC). نرم افزار هندسی انجام ترسیمها، برچسب زدن نقاط، مخفی کردن ترسیمها و ردگیری مواضع نسبی نقاط را به این صورت که، مثلاً، رأس A با استفاده از ماوس "mouse"، به این طرف و آن طرف صفحه مانیتور کشیده شود، آسان می کند. به این طریق، بسادگی ملاحظه می شود که در حالت عمومی، سه نقطه از این چهار نقطه - اما نه هر چهار - بر یک خط قرار می گیرند. انجام چنین «کشفیاتی»، بخصوص در مواقعی که انتظار ایجاد آنها می رود، آسان است!

نرم افزار هندسی، می تواند در مورد زدن و آزمایش کردن حدسها بسیار سودمند باشد. اما می شود آنچه که صفحه مانیتور نمایش می دهد، در اثر اشتباه اپراتور در تعریف شیوه ترسیم، یا به علت اشکال در نرم افزار، خطا باشد، و نیز چنین نرم افزاری، نمی تواند هیچ گونه نتایجی را در کاربرد ریاضی به طور متعارف پذیرفته نشده عبارت مورد بحث اثبات کند. همچنین نرم افزارهای دیگری وجود دارد که می توانند به جستجوگر هندسی کمک کنند؛ اما این نرم افزارها به تجرید اندازه گیریها و دستگاه تعمیم یافته ای برای نمایش نقاط در صفحه نیازمندند؛ البته، نرم افزار هندسی مورد بحث، چنین نمایشی را به طور درونی به کار می برد؛ ولی ما نمی توانیم به آن دسترسی داشته باشیم. در این صورت، با صریح کردن نمایش مزبور می توان آن را با دقتی بیشتر مورد بررسی قرار داد. می توان در مورد نمایشها، به کمک دستگاهی جبری، از قبیل درایو "derive" [4]، به کار پرداخت.

اگر نمایشهای مورد بحث را به طور عددی ارزیابی کنیم، آن گاه می توانیم برای به کار بردن آنها، از صفحه گسترده "spread sheet" ای، چون MathCAD [5]، یا زبان برنامه نویسی ای، چون True BASIC [6] استفاده کنیم. در هر یک از این حالتها، کاربر می تواند زمینه تحقیق مناسبی برای مسئله تحت بررسی تعریف کند که از زمینه های قابل دسترس واقع در منوهای نرم افزار هندسی به کار رفته، وسیعتر باشد. در مورد بسته های نرم افزاری "software packages" [4]، [5] و [6] نیز قیمتهای دانشجویی موجودند.

در این صورت، یک دستگاه مناسب نمایش، برای استفاده در مثلث، کدام است؟ یکی از موارد نامزد برای این کار، استفاده از

نقطه تلاقی ارتفاعات

$$h(\cos B \cos C, \cos C \cos A, \cos A \cos B)$$

$$(\sec A, \sec B, \sec C)$$

یا

مگر این که مثلث قائم الزاویه باشد.

مرکز ۹- نقطه

$$n(\cos(B-C), \cos(C-A), \cos(A-B))$$

در این جا توان الگوهای واقع در حروف به کار رفته، آغاز می شوند. یک «مرکز» دارای مختصات است که به طور مساوی در حروف a, b, c, A, B, C ارزیابی می شود. در چنین حالتی، کافی است که تنها مختص اول را به دست آوریم و مثال اخیر را به صورت زیر بنویسیم:

$$(\cos(B-C), \dots, 1)$$

معادله خط گذرنده از نقاط P_1 و P_2 با مختصات (x_1, y_1, z_1) ،

(x_2, y_2, z_2) توسط درمیان

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

داده می شود؛ زیرا ضرب هر سطر در عامل k مقدار درمیان را k ضرب می کند.

به این ترتیب، معادله عمومی خط دارای صورت:

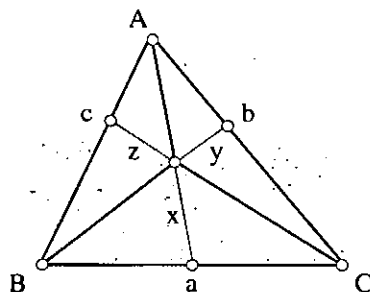
$$lx + my + nz = 0$$

است و مثالهای آن عبارت اند از ضلع $BC: x=0$ و غیره و نیمساز $AI: y-z=0$ و غیره. معادله $ax+by+cz=0$ شامل هیچ نقطه حقیقی ای از صفحه نیست؛ چه این خط، خطی در بی نهایت است. در صورتی که نقاط P_1, P_2 و P_3 همخط باشند، می توان از درمیان (۳)، با قراردادن مختصات P_3 در سطر اول آن، برای آزمون این مطلب استفاده کرد. خواننده می تواند همخط بودن o, g و h را آزمایش کرده و معادله خط مربوطه را به دست آورد.

به این ترتیب، مختصات سه خطی، ابزاری سودمند برای کاربرد است؛ اما متأسفانه اغلب کتابهای مربوط به روشهای استفاده از آنها قدیمی اند؛ کتاب Sommerville [8] بخصوص منبعی پرمایه در این زمینه است.

بین اندازه های مثلث، روابط مفیدی موجودند که قاعده

اگر P نسبت به BC هم طرف با A باشد و صفر اگر بر BC قرار داشته باشد، و منفی، اگر غیر از این دو صورت باشد واضح است که سه مقدار x, y, z مستقل نیستند و رابطه شان را با طولهای a, b, c و اضلاع Δ مساحت مثلث می توان با استفاده از تقسیم ABC به سه مثلث BPC, CPA و APB ملاحظه کرد (شکل ۳). ملاحظه می کنیم که:



شکل ۳

$$ax + by + cz = 2\Delta \quad (1)$$

این معادله، استفاده از دستگاه ساده شده مختصات سه خطی ای موسوم به انتخاب "choice" را مجاز می کند. فرض می کنیم k عامل مشترکی از مختصات سه خطی x, y, z از P باشد؛ بنابراین:

$$(x, y, z) = k(x', y', z')$$

در این صورت، می توانیم با استفاده از k انشعاب کرده (x', y', z') را به عنوان انتخابی برای P به دست دهیم. از آن جا که نیاز به رفتن از این انتخاب به مختصات دقیق داریم، می توانیم k را بار دیگر از:

$$k = 2\Delta / (ax' + by' + cz') \quad (2)$$

به دست آوریم. به این ترتیب، به عنوان مثال، سه خطی های دقیق I ، مرکز دایره محاطی داخلی، عبارت اند از (r, r, r) ، که در آنها r مرکز دایره محاطی داخلی است، و

$$(r, r, r) \equiv (1, 1, 1)$$

را، برای به دست دادن انتخابی آسانتر برای I ، می نویسیم. در نتیجه، انتخاب ساده $(1, 0, 0)$ را برای A و غیره داریم. خواننده می تواند با استفاده از مثلثات، موارد زیر را اثبات کند:

نقطه وسط BC	$(0, 1/2, 1/2)$ و غیره
مرکز ثقل	$(1/3, 1/3, 1/3)$
مرکز دایره محیطی	$o(\cos A, \cos B, \cos C)$

کسینوسها یکی از آنهاست.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

و غیره. پیرامون مثلث عبارت است از: $a + b + c = 2s$ ، فرمول

هرون "Heron" برای Δ ، مساحت مثلث، عبارت است از:

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad (4)$$

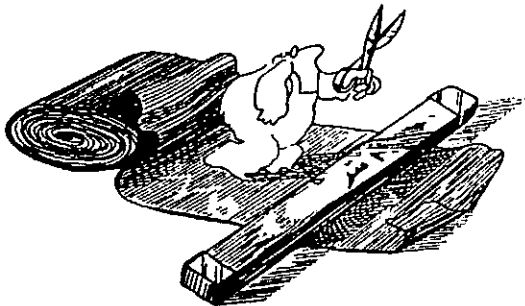
و به شعاع دایره محاطی داخلی، توسط

$$r = \Delta / s \quad (5)$$

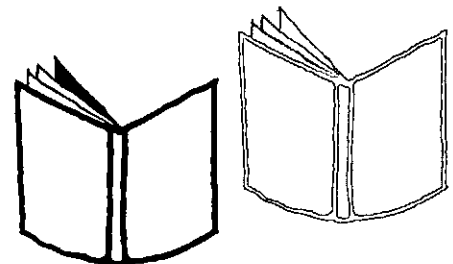
داده می شود.

علاوه بر نقاط h, g, o, l و n که هم اکنون آنها را ذکر کردیم، در رابطه با مثلث عمومی، نقاط و دایره های بسیاری موجودند که نام کاشفان خود را دارند. (هم ارز هندسی زیست شناسی!) که بعضی از آنها در زمان ما به طور کامل ناشناخته و گمنامند. علاوه بر نقطه فرما "Fermat"، نقاط لمواین "Lemoine"، بروکار "Brocard" و زرگون "Gergonne" و دایره های آپولونیوس "Apollonius"، تاکر "Tucker" و فویرباخ "Feuerbach" موجودند. خمهای دیگری نیز وجود دارند و از آن قبیل اند مکان هذلولوی "hyperbolic locus" و پوش سهموی "parabolic envelope" کی پرت "Kiepert" و مکعبیهای ثوی برگ "cubic of Neuberg". بجز خط اویلر "Euler"، خطوط سیمسون "Simson" موجودند که پوش دلتاوار اشتاینر "Steiner doltoid" هستند، که با مثلث مورلی "Morley triangle" مرتبط است. بسیاری از این دستاوردهای جذاب را می توان در Wells [9] یافت که چنین از سریل "Crelle" نقل قول می کند: «این موضوع بس شگفت انگیز است که شکلی بسادگی مثلث، این گونه ویژگیهای پایان ناپذیر دارد».

ادامه دارد



پارچه فروشی می خواهد پارچه هایش را با ۴۰٪ سود بفروشد. اما وسیله ای که برای اندازه گیری به کار می برد طول مناسبی ندارد. به همین دلیل متوجه می شود که به جای ۴۰٪ سود فقط ۳۹٪ سود عایدش شده است. طول وسیله ای را که او برای اندازه گیری به کار برده است تعیین کنید.



• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸