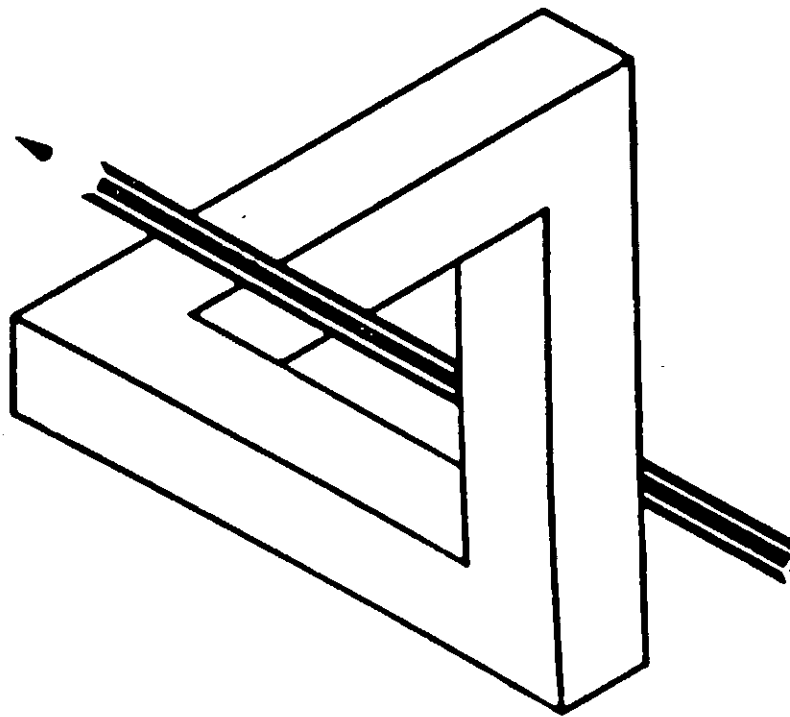


تجزیه چند جمله‌ایها از طریق ریشه‌یابی

(برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان)

● رضا پیکر



به صورت حاصل ضرب n عامل و به صورت زیر نوشت :

$$P(x) = (b_1x + c_1)(b_2x + c_2) \dots (b_nx + c_n)$$

که ممکن است ضرایب هریک از عاملها اعداد گویا نباشند بلکه این اعداد شاید اعداد گنگ و یا متعلق به مجموعه اعداد مختلط باشند. (این مطلب را می‌توان بسادگی از این مطلب که هر معادله درجه n و به صورت

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

دقیقاً دارای n ریشه است نتیجه‌گیری کرد که شما در سالهای بالاتر و شاید در دوره دانشگاه با اثبات آن آشنا خواهید شد.) هریک از عاملهای $(b_1x + c_1), (b_2x + c_2), \dots, (b_nx + c_n)$ را اول می‌گوییم هرگاه تمامی اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ و $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعداد گویا باشند در غیر اینصورت عاملهای یاد شده را عامل اول نمی‌خوانیم. به طور مثال چند جمله‌ای :

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

حاصل ضرب جملات $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ تجزیه کرد. از آنجا که ضرایب هریک از عاملهای به دست آمده اعدادی گویا می‌باشند پس هر پراتنر را یک عامل اول چند جمله‌ای مذکور می‌خوانیم. اکنون چند جمله‌ای :

$$x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 100x - 5$$

را در نظر بگیرید. این چند جمله‌ای را می‌توان بصورت

مفهوم تجزیه: تجزیه یک چند جمله‌ای عبارتست از تبدیل آن چند جمله‌ای به صورت حاصل ضرب دو یا چند عامل. تجزیه وقتی کامل است که هریک از عاملهای به دست آمده اول (تجزیه ناپذیر) باشند. به بیان دیگر منظور از تجزیه یک چند جمله‌ای نوشتن آن به صورت حاصل ضرب عاملهای اول است. به عنوان مثال چند جمله‌ای :

$$q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 5$$

را می‌توان به صورت $(2x-5)(x^2-2x+1)$ تجزیه کرد ولی صورت اخیر یک تجزیه کامل از چند جمله‌ای $q(x)$ نیست چرا که می‌توان عبارت (x^2-2x+1) را به صورت حاصل ضرب دو عامل $(x-1)(x-1)$ نوشت. بنابراین تجزیه کامل چند جمله‌ای $q(x)$ عبارت است از : $(2x-5)(x-1)^2$. هریک از پراتنرهای $(x-1), (x-1)$ و $(2x-5)$ را یک عامل اول چند جمله‌ای $q(x)$ می‌گویند.

◀ عامل اول

چند جمله‌ای $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ را با ضرایب صحیح در نظر بگیرید $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ را که متعلق به مجموعه اعداد صحیح می‌باشند ضرایب چند جمله‌ای $P(x)$ می‌گوییم. چند جمله‌ای $P(x)$ را می‌توان

خواهیم داشت:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x^2 + x - 1)$$

صورت اخیر یک تجزیه کامل از چند جمله‌ای مفروض است چرا که چند جمله‌ای $x^2 + x - 1$ تجزیه‌ناپذیر است و خود یک عامل اول است.

در تجزیه به روش ریشه‌یابی حتماً یک عامل اول درجه یک به دست می‌آید. و تنها در صورتی که چند جمله‌ای مورد نظر دارای عامل اول درجه یک باشد می‌توان از طریق ریشه‌یابی اقدام به تجزیه آن کرد در غیر این صورت می‌بایست از روشهای ابتکاری کمک گرفت.

◀ حدس ریشه α

منظور از حدس ریشه α پیدا کردن عددی است که چند جمله‌ای به ازای آن صفر شود. برای پیدا کردن این عدد مجاز هستیم هر عدد دلخواه را در چند جمله‌ای امتحان کنیم. امتحان هر عدد دلخواه کاری وقت گیر و پردردسر است، از اینرو باید روشی برای پیدا کردن محدوده اعدادی که چند جمله‌ای مورد نظر را صفر می‌کند پیدا کنیم. برای این منظور به بیان و اثبات قضیه زیر توجه کنید.

قضیه: چند جمله‌ای

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

با ضرایب صحیح مفروض است اگر این چند جمله‌ای به ازای عدد گویای $\frac{b}{c}$ که به ساده‌ترین صورت است، صفر شود آنگاه b یک مقسوم علیه a_0 و c یک مقسوم علیه a_n است.

قبل از اثبات قضیه مطلب را با یک مثال روشن می‌کنیم: چند جمله‌ای $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ را در نظر بگیرید. قضیه حکم می‌کند که اگر $\frac{b}{c}$ یک ریشه این چند جمله‌ای باشد آنگاه b یک مقسوم علیه 5 و c یک مقسوم علیه 2 است از اینرو عدد b می‌تواند یکی از اعداد $5, +5, -5, +1, -1$ و c می‌تواند یکی از اعداد $2, +2, -2, +1, -1$ باشد پس $\frac{b}{c}$ قطعاً به مجموعه اعداد زیر تعلق خواهد داشت.

$$\left\{ \frac{+5}{+2}, \frac{+5}{-2}, \frac{+5}{+1}, \frac{+5}{-1}, \frac{-5}{+2}, \frac{-5}{-2}, \frac{-5}{+1}, \frac{-5}{-1} \right\}$$

۱- منظور از این که $\frac{b}{c}$ به ساده‌ترین صورت است این است که a و b نسبت به هم اولند یا $(b, c) = 1$

حاصل ضرب $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})(x+5)(x-5)$ نوشت. پرائتهای $(x-2+\sqrt{2})$ و $(x-2-\sqrt{2})$ را عاملهای اول چند جمله‌ای یاد شده نمی‌خوانیم چرا که دارای ضرایب گویا نیستند. اما حاصل ضرب دو پرائته اخیر عامل $x^2 - 4x + 2$ را به دست می‌دهد که این عامل دارای ضرایب گویا است و آن را یک عامل اول چند جمله‌ای مورد نظر می‌خوانیم و تجزیه چند جمله‌ای یاد شده به صورت حاصل ضرب سه پرائته $(x^2 - 4x + 2)(x+5)(x-5)$ خواهد بود. از این مثال چنین نتیجه می‌گیریم که هر عامل اول یک چند جمله‌ای حتماً نباید یک چند جمله‌ای درجه اول به صورت $(bx+c)$ باشد بلکه این عامل می‌تواند به صورت یک چند جمله‌ای تجزیه‌ناپذیر از نوع درجه دوم، سوم و یا بیشتر باشد. بنابراین منظور از عامل اول در مبحث تجزیه، چند جمله‌ای از درجه یک، دو یا بیشتر است که هریک از ضرایب این چند جمله‌ای اعدادی گویا باشند و در ضمن قابل تجزیه به عامل یا عامل‌های اول دیگر نباشد.

◀ تجزیه بوسیله ریشه‌یابی

برای تجزیه یک چند جمله‌ای مفروض باید روشهای ابتکاری به کار برد. یکی از کاربردهای تجزیه در آن است که بدان وسیله می‌توان ریشه‌های یک چند جمله‌ای مفروض را به دست آورد. اما گاهی روشی که برای تجزیه آن چند جمله‌ای به کار می‌رود، به آنجا می‌انجامد که باید ریشه‌های آن چند جمله‌ای را حدس زد. به چنین روشی تجزیه به وسیله ریشه‌یابی می‌گویند.

چند جمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را در نظر بگیرید. اگر α ریشه چند جمله‌ای $P(x)$ باشد بدین منظور که هرگاه در معادله $P(x) = 0$ به جای x مقدار α را قرار دهیم، معادله برقرار باشد، آنگاه چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - \alpha$ بخش پذیر است و در نتیجه $P(x)$ بصورت $(x - \alpha)Q(x)$ تجزیه می‌شود که البته امکان دارد صورت اخیر یک تجزیه کامل $P(x)$ نباشد که باید در تجزیه پذیری $Q(x)$ کاوش کرد. به عنوان مثال عدد ۳ ریشه چند جمله‌ای $x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ است بدین معنی که عدد ۳ چند جمله‌ای اخیر را صفر می‌کند. از اینرو این چند جمله‌ای بر $(x-3)$ بخش پذیر است. با تقسیم چند جمله‌ای بر عامل $(x-3)$ می‌توانیم آن را تجزیه کنیم و

مقسوم علیه ۲۸- و عدد c یک مقسوم علیه ۲ خواهد بود. از این رو b می تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴، ۲۸ و c می تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴، ۲۸ باشد. بنابراین ریشه یا ریشه های چند جمله ای در صورت وجود حتماً متعلق به مجموعه اعداد زیر خواهند بود:

$$\left\{ \mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp 2, \mp 4, \mp 7, \mp \frac{7}{2}, \mp 14, \mp 28 \right\}$$

با صرف اندکی وقت و آزمایش اعداد یاد شده در چند جمله ای درمی یابیم که اعداد ۴ و ۷ و $\frac{1}{2}$ ریشه های چند جمله ای مورد نظر هستند پس این چند جمله ای بر عاملهای $(x-4)$ ، $(x-7)$ و $(x-\frac{1}{2})$ بخش پذیر است و بنابراین تجزیه کامل چند جمله ای مورد نظر عبارت خواهد بود از:

$$2x^3 - 23x^2 + 67x - 28 = 2(x-4)(x-\frac{1}{2})(x-7)$$

اکنون به نتیجه ای که از قضیه اخیر حاصل می شود توجه کنید:

* چند جمله ای $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

($a_n = 1$) را که ضرایب آن عددهای صحیح هستند مفروض است. اگر این چند جمله ای یک ریشه گویا داشته باشد آن ریشه یک عدد صحیح است و همچنین یک مقسوم علیه a_0 است.

تمرین

۱- ثابت کنید:

الف- هرگاه مجموع ضرایب یک چند جمله ای برابر با صفر باشد یک ریشه آن برابر با ۱ است.

ب- هرگاه مجموع ضرایب جملات توان زوج، با مجموع ضرایب جملات توان فرد در یک چند جمله ای برابر باشد یک ریشه آن چند جمله ای برابر با ۱- است.

۲- چند جمله ایهای زیر را تجزیه کنید:

۱) $3x^2 + 2x - 8$

۲) $2x^2 - 13x + 20$

۳) $6x^2 - 25x + 14$

۴) $4x^2 + 7x^2 - 10x + 2$

۵) $x^4 + x^2 - 6x + 4$

۶) $x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x + 64$

۷) $8x^4 - 80x^3 + 258x^2 - 310x + 100$

۸) $x^5 - 8x^4 + 19x^3 - 9x^2 - 27$

۹) $x^6 - 2x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 11x - 12$

$$\left\{ \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1} \right\}$$

که فهرست اعداد فوق تنها شامل ۸ عدد متمایز خواهد بود که عبارتند از:

$$\left\{ \mp \frac{5}{1}, \mp \frac{5}{2}, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{1} \right\}$$

که می توان ثابت کرد از این اعداد فقط عدد ۵+ ریشه چند جمله ای خواهد بود.

اثبات قضیه: فرض می کنیم $\frac{b}{c}$ یک ریشه چند جمله ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ باشد. در این صورت اگر به جای x مقدار $\frac{b}{c}$ را قرار دهیم آنگاه $P(x) = 0$ برقرار خواهد بود پس داریم:

$$a_n \left(\frac{b}{c}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{b}{c}\right) + a_0 = 0$$

با ضرب طرفین در c^n داریم:

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} c + \dots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n = 0 \quad (I)$$

$$a_n b^n = -a_{n-1} b^{n-1} c - a_{n-2} b^{n-2} c^2 - \dots - a_1 b c^{n-1} - a_0 c^n$$

$$a_n b^n = c(-a_{n-1} b^{n-1} - a_{n-2} b^{n-2} c - \dots - a_1 b c^{n-1} - a_0 c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می دهد که c یک مقسوم علیه $a_n b^n$ است و از آنجا که c نسبت به b اول است پس نسبت به b^n نیز اول خواهد بود و در نتیجه c یک مقسوم علیه a_n است. تاکنون نمی از قضیه به اثبات رسیده است حال معادله (I) را به صورت زیر می نویسیم:

$$a_0 c^n = -a_n b^n - a_{n-1} b^{n-1} c - \dots - a_1 b c^{n-1}$$

$$a_0 c^n = b(-a_n b^{n-1} - a_{n-1} b^{n-2} c - \dots - a_1 c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می دهد که b یک مقسوم علیه $a_0 c^n$ است و از آنجا که b نسبت به c اول است پس نسبت به c^n نیز اول خواهد بود و در نتیجه b یک مقسوم علیه a_0 است.

به این ترتیب برای حدس یک ریشه چند جمله ای دلخواه با آزمایش چند عدد می توان در صورتی که چند جمله ای دارای ریشه باشد آن را به دست آورد.

مثال: چند جمله ای $2x^3 - 23x^2 + 67x - 28$ را تجزیه کنید.

اگر چند جمله ای مفروض دارای ریشه باشد، این ریشه مطابق بحث گذشته اگر $\frac{b}{c}$ باشد، عدد b باشد، عدد c یک

$$x^2 \left[\left(2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \right] = (2x^2 + x + 2)(x^2 - 2x + 1)$$

بنابراین هر چند جمله‌ای درجه چهارم که به شکل $R(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ باشد این قابلیت را دارد که با فاکتورگیری از x^2 چند جمله‌ای را بر حسب $x + \frac{1}{x}$ مرتب کرده و در صورتی که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه پذیر باشد با استفاده از ریشه یابی به تجزیه آن پرداخت می‌توانیم بنویسیم:

$$R(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a \\ = x^2 \left[a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2a + c \right]$$

چنانچه $R(x)$ تجزیه پذیر باشد عبارت داخل کروشه را می‌توان با در نظر گرفتن $x + \frac{1}{x} = y$ و از روش ریشه یابی تجزیه کرد که در مرحله بعدی با جایگزین کردن مقدار $x + \frac{1}{x}$ به جای y عاملهای اول $R(x)$ به دست خواهند آمد.

همچنین می‌توان چند جمله‌ای درجه ششم $K(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$ را با فاکتورگیری از x^3 و مرتب کردن بر حسب $x + \frac{1}{x}$ به روش فوق تجزیه کرد. به مثال زیر توجه کنید.

چند جمله‌ای $K(x) = 6x^6 - x^5 + 13x^4 + 13x^3 - x + 6$ را تجزیه کنید.

$$6x^6 - x^5 + 13x^4 + 13x^3 - x + 6 \\ = x^3 \left[6x^3 - x^2 + 13x + \frac{13}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right] \\ = x^3 \left[6 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \\ = x^3 \left[6 \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 + 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]$$

چنانچه $x + \frac{1}{x} = y$ را فرض کنیم داریم:

$$= x^3 [6y(y^2 - 3) - y^2 + 2 + 13y] = x^3 [6y^3 - y^2 - 5y + 2]$$

عبارت $(6y^3 - y^2 - 5y + 2)$ از طریق ریشه یابی قابل تجزیه به سه پراوتر $(2y - 1)(3y - 2)(y + 1)$ است و در نتیجه

$$10) \quad x^7 + 2x^6 - 12x^5 - 24x^4 + 48x^3 + 96x^2 - 64x - 128$$

یک حالت ویژه

چند جمله‌ای درجه زوج:

$$R(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

برای تجزیه این چند جمله‌ای از طریق ریشه یابی مطابق بحث گذشته می‌بایست اعداد $\{ \mp 2, \mp \frac{1}{2}, \mp 1 \}$ را در آن امتحان کرد. با کمی صرف وقت مشخص می‌شود که هیچ کدام از اعداد یادشده ریشه چند جمله‌ای $R(x)$ نمی‌باشند. این بدان معنی نیست که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه ناپذیر است و دارای عامل اول نیست بلکه این مطلب را می‌رساند که دارای عامل درجه یک نیست یا به بیان دیگر $R(x)$ را نمی‌توان به صورت $R(x) = (ax + b)Q(x)$ نوشت که $Q(x)$ چند جمله‌ای درجه سوم باشد. اما امکان دارد چند جمله‌ای $R(x)$ به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای درجه دوم و به شکل کلی

$$R(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)$$

شود. برای بررسی این احتمال به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = x^2 \left[2x^2 - 3x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right]$$

عبارت داخل کروشه را بر حسب $x + \frac{1}{x}$ مرتب می‌کنیم داریم:

$$x^2 \left[2x^2 - 3x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right] = x^2 \left[2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 \right]$$

با فرض $x + \frac{1}{x} = y$ خواهیم داشت:

$$x^2 \left[2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 \right] = x^2 [2y^2 - 3y - 2]$$

عبارت $(2y^2 - 3y - 2)$ از طریق ریشه یابی قابل تجزیه است و داریم:

$$x^2 [2y^2 - 3y - 2] = x^2 [(2y + 1)(y - 2)]$$

چنانچه به جای y در عبارت فوق مقدار مساویش یعنی $x + \frac{1}{x}$ را قرار داده و ساده کنیم خواهیم داشت:



ادب ریاضی

ریاضیات، در مسیر پیشرفت تکاملی خود، هم زیر تأثیر انگیزه بیرونی بوده است و هم زیر فشار انگیزه درونی. انگیزه بیرونی، یعنی نیازهای زندگی و نیازهای دانشهای طبیعی به ریاضیات؛ و انگیزه درونی، یعنی استدلال و منطق درونی ریاضیات که بر پایه روش قیاسی شکل گرفته است.

از یک طرف، با بغرنجتر شدن زندگی اجتماعی و اقتصادی و در عین حال، با نیاز روزافزونی که دانشهای طبیعی، به ویژه اخترشناسی، فیزیک، موسیقی، اقتصاد، زیست شناسی، ... برای دقیقتر شدن و «به ریاضی درآمدن» دارند، برای ریاضیات مسأله‌های تازه‌ای مطرح می‌شود و شاخه‌های تازه‌ای پدید می‌آید و، از طرف دیگر، منطق درونی ریاضیات، موجب استوارتر شدن مبانی پیشین و درک دقیقتر و قابل انعطافتر مفاهیم ریاضی می‌شود.

این دو انگیزه، بیرونی و درونی، هر دو همیشه در کار پیشبرد ریاضیات بوده‌اند، ولی گاه این و گاه آن بیش‌تر گرفته و نیرومندتر عمل کرده است. با وجود این، هیچ کدام از این دو انگیزه نمی‌تواند برای مدتی بسیار طولانی، یکه‌تاز باشد و تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که دیر یا زود، به هم می‌رسند و «انتزاع» به باری «عمل» می‌آید و «عمل»، «انتزاعهای تازه‌ای» را مطرح می‌کند.

از مقاله «ریاضیات کاربردی»

نوشته پرویز شهزادری، برهان ۱۶

داریم:

$$x^3[6y^3 - y^2 - 5y + 2] = x^3[(2y-1)(3y-2)(y+1)]$$

با جایگزینی $x + \frac{1}{x}$ به جای y در عبارت فوق و ساده کردن خواهیم داشت:

$$k(x) = (2x^2 - x + 2)(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 1)$$

استفاده از همین روش، تجزیه چند جمله‌ایهای مشابه را با توانهای بالاتر در صورت تجزیه پذیر بودن ممکن می‌سازد که تحقیق در این زمینه را به عهده دانش آموزان می‌گذاریم. تمرین: چند جمله‌ایهای درجه زوج زیر را تجزیه کنید.

۱) $9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x + 9$

۲) $6x^4 + x^3 + 11x^2 + x + 6$

۳) $x^6 + 2x^5 - 20x^4 - 56x^3 - 20x^2 + 2x + 1$

۴) $27x^6 - 54x^5 + 117x^4 - 116x^3 + 117x^2 - 54x + 27$

۵) $x^8 - 14x^6 + 51x^4 - 14x^2 + 1$

راهنمایی: برای تجزیه شماره ۵ از x^4 فاکتور بگیرید و سپس برحسب $x + \frac{1}{x}$ مرتب کنید.

۶) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2$

۷) $x^6 + 6x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 6x - 1$

راهنمایی: برای تجزیه تمرینهای شماره ۶ و ۷ به ترتیب از x^3 و x^2 فاکتورگیری کرده برحسب $(x - \frac{1}{x})$ مرتب کنید و مطابق شیوه مذکور تجزیه کنید.

