



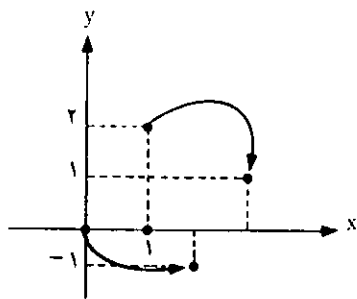
تبدیل - تبدیلات خطی

(نگاشتهای خطی)

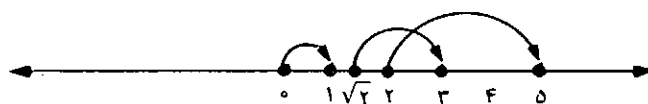
(دانش آموزان پیش‌دانشگاهی، رشته ریاضی)

● حمیدرضا امیری

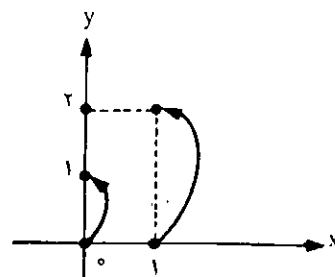
به عنوان مثال دیگری، تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم.
 $f((x,y)) = (x+2, y-1)$
 این تابع روی مجموعه نقاط صفحه دکارتی $(\mathbb{R}^2)$ اثر کرده و هر نقطه را با ضابطه‌ای مشخص به نقطه دیگری در همان صفحه تبدیل می‌کند. مثلاً، نقطه $(2, 1)$ را به نقطه $(4, 0)$ و $(3, 1)$ را به نقطه $(5, 0)$ و $(0, 0)$ را به $(2, -1)$ تبدیل می‌کند، به نمودار توجه کنید:



شاید ساده‌ترین نوع تبدیل را بتوانیم در توابع حقیقی جستجو کنیم، مثلاً وقتی می‌نویسیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در واقع یک تبدیل روی خط اعداد حقیقی متصور می‌شود، در این مثال تابع f عدد حقیقی صفر را به 1 ($f(0)=1$) و عدد حقیقی 2 را به 5 و عدد حقیقی $\sqrt{2}$ را به 3 و ... تبدیل می‌کند، این تبدیل روی خط اعداد حقیقی انجام شده و کاملاً مشهود است.



حال اگر تابعی را از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^2$ تعریف کنیم، هر عدد حقیقی را به یک زوج مرتب تبدیل کرده‌ایم و یا به عبارت دیگر هر نقطه یک‌بعدی را به نقطه‌ای با دو بعد در صفحه مختصات دکارتی تبدیل کرده‌ایم. مثلاً اگر تعریف کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f(x) = (x, x+1)$
 تابع f عدد حقیقی صفر را به زوج مرتب $(0, 1)$ و عدد حقیقی 1 را به زوج مرتب $(1, 2)$ و ... تبدیل می‌کند.



به همین ترتیب می‌توان توابعی از صفحه $(\mathbb{R}^2)$ به فضا $(\mathbb{R}^3)$ و یا از $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به عنوان مثال
 $f((x,y)) = (x+1, y-2, x+y)$

تابعی است از مجموعه نقاط صفحه به فضای سه‌بعدی و

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 نیز تابعی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^2$ می‌باشد که
 $g((x,y,z)) = (x-1, y+z)$

هر کدام ویژگیهای مخصوص به خود را داشته و در نهایت یک تبدیل را برای ما انجام می‌دهند.

حال می‌خواهیم اندکی بیشتر روی تابع f در مثال اخیر، تأمل کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تأثیر تابع f روی یک عضو از

تعریف شده است، خطی نمی‌باشد، زیرا در تعریف f_1 ، $x_1 x_2$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم است.

$$f_1((x_1, x_2)) = x_1 x_2 + x_1$$

$$f_2((x_1, x_2)) = x_1 - x_2$$

$$f_3((x_1, x_2)) = 2x_1 + x_2$$

مثال ۳: تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که به صورت زیر تعریف شده است، خطی نیست زیرا، در تعریف f_1 ، مقدار ثابت ۲ از درجه ۱ نیست.

$$f_1(x) = x + 2$$

$$f_2(x) = 2x$$

مثال ۴: تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f((x_1, x_2)) = (f_1, f_2)$ که

$$f_1((x_1, x_2)) = (\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2$$

و

$$f_2((x_1, x_2)) = (\sin \alpha)x_1 - (\cos \alpha)x_2$$

یک تابع خطی است زیرا f_1 و f_2 نسبت به x_1 و x_2 از درجه اول و همگونی هستند. تابع فوق هر نقطه از صفحه را نسبت به خط $y = x \tan \alpha$ قرینه کرده و نقطه جدیدی در صفحه مشخص می‌کند.

◀ نگاشتهای خطی و نمایش ماتریسی آنها

قرارداد: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ با ضابطه

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

را با فرض $y_1 = f_1, y_2 = f_2, \dots, y_m = f_m$ و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ می‌توان به صورت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نمایش داد.

$$f(x) = y$$

با توجه به قرارداد فوق و با توجه به این که f یک نگاشت خطی است، هر y_i که تابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ است به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

⋮

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

حال اگر ضرایب a_{ij} را به همان ترتیب نوشته شده روی سطرها و ستونهای منظمی قرار دهیم ماتریسی $m \times n$ همچون $A = [a_{ij}]$ به دست می‌آید که در این صورت نگاشت f را می‌توان به شکل ماتریسی و به صورت زیر نمایش داد:

$\mathbb{R}^2$ یک سه تایی مرتب از $\mathbb{R}^2$ است که هر مؤلفه این سه تایی مرتب با ضابطه خاصی ایجاد می‌شود، اگر قرار دهیم:

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1((x, y)) = x + y, \quad f_2((x, y)) = y - 2, \quad f_3((x, y)) = x + 1$$

در این صورت تابع f را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f((x, y)) = (f_1, f_2, f_3)$$

و در مورد تابع g اگر قرار دهیم

$$g_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{و} \quad g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_1((x, y, z)) = y + z, \quad g_2((x, y, z)) = x - 1$$

در این صورت تابع g را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g((x, y, z)) = (g_1, g_2)$$

و همان طور که مشاهده می‌کنید هر g_i تابعی است از $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

در حالت کلی می‌توان این مطلب را تعمیم داده و بگوییم:

اگر f تابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد، می‌توان آن را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

که در تعریف فوق هر f_i تابعی است از $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

حال می‌خواهیم دسته خاصی از تابعهای به شکل فوق را مورد بررسی قرار دهیم.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

اگر در تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، هر f_i

$$f_i((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in})$$

که تابعی از $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد بر حسب x_1 و x_2 و ... و x_n از درجه ۱ و همگون باشد، آن را یک تابع خطی یا نگاشت خطی می‌نامند.

مثال ۱: تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که به صورت زیر

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (f_1, f_2)$$

تعریف می‌شود خطی است:

$$f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$f_2((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 + x_2$$

مثال ۲: تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که به صورت زیر

$$f((x_1, x_2)) = (f_1, f_2)$$

$$f((x_1, x_2)) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f((x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$$

در صفحه ۵۶ کتاب درسی ثابت شده است که این تبدیل خطی، تبدیل دورانی حول مبدأ مختصات و به اندازه زاویه θ می باشد.

مسأله ۱: اگر A ماتریس $m \times n$ (ماتریس تبدیل نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) باشد و $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (مؤلفه j ام یک است و بقیه مؤلفه های n تایی، همگی صفر هستند) در این صورت ثابت کنید $f(e_j) = A_j$ ، که A_j ستون j ام ماتریس A است.

طبق مطالب قبل، هر تبدیل خطی مانند f متناظر است با یک ماتریس تبدیل مانند A و برعکس؛ بنابراین برای اثبات مطلب فوق کافی است ماتریس A را در بردار ستونی e_j ضرب کرده و حاصل A_j باشد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A_j$$

نتیجه مهم: اگر A ماتریس تبدیل خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ باشد در این صورت این ماتریس را می توان به شکل زیر توجیه کرد:

ستون اول A یعنی A^1 برابر است با $f(e_1)$ و ستون دوم A یعنی A^2 برابر است با $f(e_2)$ و ستون n ام A ، برابر است با $f(e_n)$. حال به دنبال محک و ملاکی هستیم تا بتوانیم خطی بودن یک نگاشت را تشخیص دهیم؛ قضیه زیر این محک را به دست ما می دهد.

قضیه: نگاشت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت خطی است. اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$f(x+x') = f(x) + f(x') : x, x' \in \mathbb{R}^n$$

$$f(rx) = rf(x) : r \in \mathbb{R} \text{ و } x \in \mathbb{R}^n$$

(اثبات قضیه در کتاب درسی موجود است)

بنابراین از این به بعد برای اثبات خطی بودن یک نگاشت فقط کافی است دو شرط (الف) و (ب) را برای آن بررسی کنیم.

مسأله ۲: تابع f به صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید این تابع، یک تابع خطی است.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f((x_1, x_2)) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ y_2 &= x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad y = Ax$$

همانطور که مشاهده می کنید هر نگاشت خطی را می توان به صورت ماتریسی نمایش داد و در واقع اگر f یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد، این نگاشت را می توان از تأثیر یک ماتریس $m \times n$ روی اعضای $\mathbb{R}^n$ که به صورت ماتریسهای ستونی نوشته شده باشند، به دست آورد.

همچنین اگر یک ماتریس $m \times n$ بر عضوی از $\mathbb{R}^n$ (n -تاییهای مرتب) که به صورت ستونی نوشته شده اند، اثر کند حاصل یک عضو از $\mathbb{R}^m$ بوده و در واقع یک نگاشت خطی تعریف می شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۵: تبدیل خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه زیر مفروض است این تبدیل را به شکل ماتریسی نمایش می دهیم:

$$y_1 = f_1((x_1, x_2)) = 4x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = f_2((x_1, x_2)) = -2x_1 + x_2$$

$$y_3 = f_3((x_1, x_2)) = \sqrt{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۶: تبدیل خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ در زیر به شکل ماتریسی نمایش داده شده است

$$y_1 = f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3$$

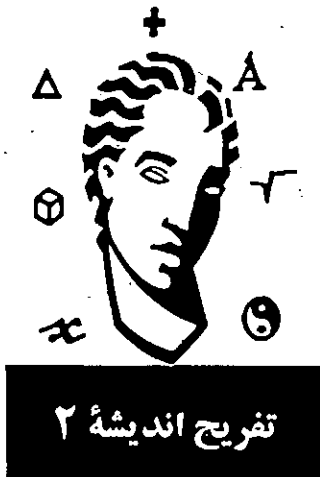
$$y_2 = f_2((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مثال ۷: هرگاه صورت ماتریسی یک تبدیل خطی به صورت زیر باشد،

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت اگر این تبدیل خطی را f بنامیم خواهیم داشت:

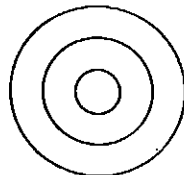


تمرین به هدف زدن

خانم معلم از جواد پرسید: در صورتی که گلوله‌ای در هر چهار بار یک بار به هدف بخورد، و چهار گلوله از چنین گلوله‌هایی به یک هدف زده شود، احتمال این که تیر به هدف بخورد چقدر است؟
جواد پاسخ داد: ساده است، قطعاً یک گلوله در هدف خواهد نشست.

— برو پای تخته و بیست و پنج بار بنویس:

La Théorie de Probabilité n'est que
le bon sens confirmé par le calcul Marquis de
Laplace



جواب در صفحه ۸۸

کافی است شرطهای الف و ب را ثابت کنیم پس:

$$\begin{aligned}
 \text{الف)} \quad & f[(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)] = f[(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)] \\
 & = ((x_1 + x'_1)\cos\theta - (x_2 + x'_2)\sin\theta) \\
 & \quad (x_1 + x'_1)\sin\theta + (x_2 + x'_2)\cos\theta) \\
 & = ((x_1\cos\theta - x_2\sin\theta) + (x'_1\cos\theta + x'_2\sin\theta)) \\
 & \quad (x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) + (x'_1\sin\theta + x'_2\cos\theta)) \\
 & = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + x'_1\sin\theta + x'_2\cos\theta) + \\
 & \quad (x'_1\cos\theta + x'_2\sin\theta + x'_1\sin\theta + x'_2\cos\theta) \\
 & = f((x_1, x_2)) + f((x'_1, x'_2)) \\
 \text{ب)} \quad & f(r(x_1, x_2)) = f((rx_1, rx_2)) \\
 & = (rx_1\cos\theta - rx_2\sin\theta + rx_1\sin\theta + rx_2\cos\theta) \\
 & = (r(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta) + r(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)) \\
 & = r(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) \\
 & = rf((x_1, x_2))
 \end{aligned}$$

پس با توجه به قضیه قبل تابع f ، خطی است که اگر آن را R_0 بنامیم و نقطه (x_1, x_2) را روی صفحه مختصات مشخص کرده و تبدیل یافته آن تحت تأثیر R_0 را نیز به دست آوریم به راحتی مشاهده می‌شود که نقطه (x_1, x_2) به اندازه زاویه θ حول مبدأ دوران یافته است پس R_0 یک تبدیل دوران حول مبدأ است.

مسئله ۳: آیا تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f((x_1, x_2)) = x_1 x_2$ تعریف شده است خطی است یا خیر؟

با توجه به تعریف تابع خطی واضح است که $x_1 x_2$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم بوده و تابع خطی نیست و نیز با توجه به قسمت (ب) قضیه قبل داریم:

$$f(r(x_1, x_2)) = f((rx_1, rx_2)) = rx_1 \times rx_2 = r^2 x_1 x_2 \quad (1)$$

$$rf((x_1, x_2)) = r \times x_1 x_2 = rx_1 x_2 \quad (2)$$

تابع خطی نیست $\Rightarrow f(r(x_1, x_2)) \neq rf((x_1, x_2)) \Rightarrow (1) \text{ و } (2)$

