

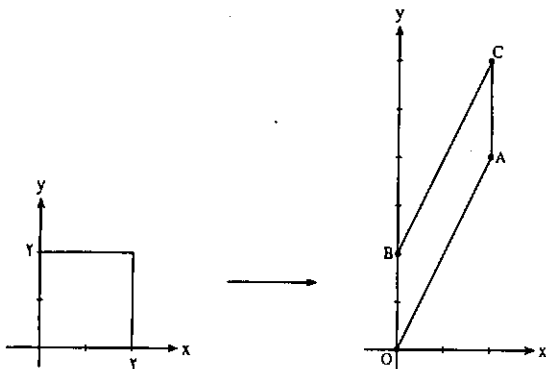
تبدیل در صفحه ۲

ماتریس های تبدیل و کاربرد آن ها

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

شماره ۱۴

برای دانش آموزان دوره متوسطه



در شماره قبل، درباره 'تبدیل در صفحه' مطالبی ارائه کردیم و به بررسی دو ماتریس تبدیل پرداختیم. در این مقاله، بررسی ماتریس های تبدیل را ادامه می دهیم.

۳. ماتریس های برش

ماتریس های $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس های برش در امتداد محور x ها و y ها هستند و چون همواره $|T_1| = |T_2| = 1$ ، پس مساحت شکل حاصل از تأثیر این دو ماتریس نسبت به شکل اولیه، تغییر نمی کند.

مثال: مربع به طول ضلع ۲ با ماتریس نقاط $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ به چه شکلی تبدیل می شود؟

مساحت آن را با مساحت مربع مقایسه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

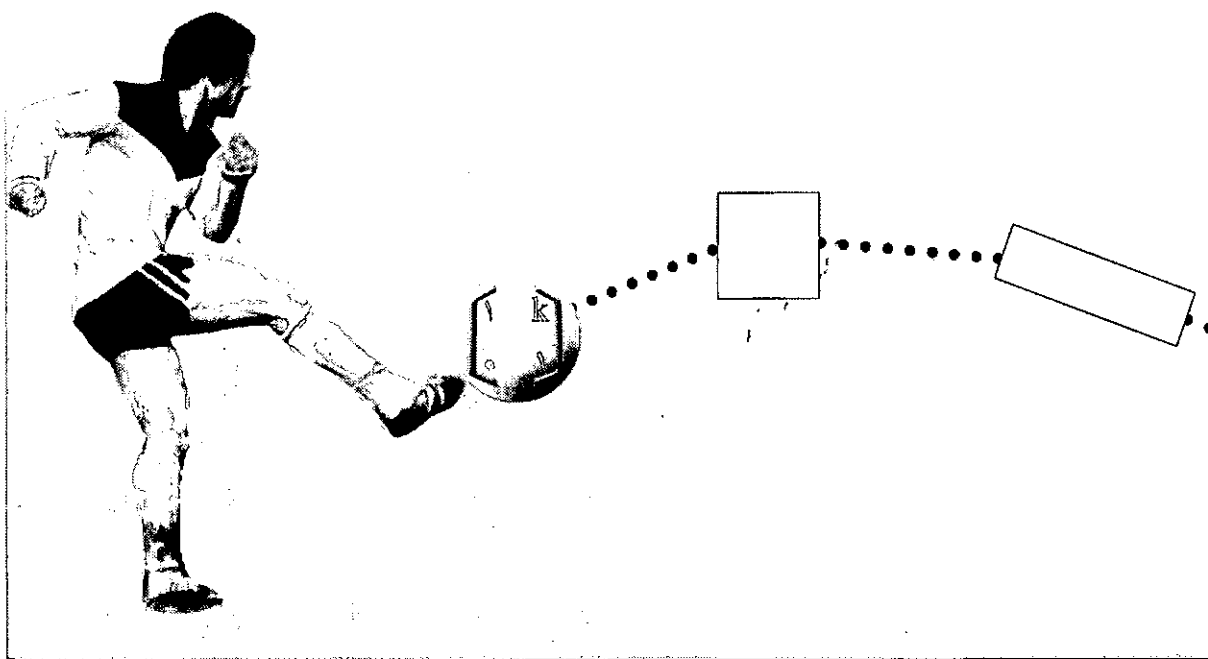
مساحت مربع قبل از تبدیل $S = 2^2 = 4$ بود و مساحت متوازی الاضلاع حاصل با توجه به نکته ای که در مقاله شماره قبل بیان کردیم و با استفاده از سه نقطه O و A و B برابر است با:

$$S_{OABC} = \left\| \begin{bmatrix} 2-0 & 4-0 \\ 0-0 & 2-0 \end{bmatrix} \right\| \Rightarrow S = 2 \times 2 - 4 \times 0 = 4$$

واضح است، تبدیل های برشی نیز به این دلیل که شکل را تغییر می دهند، تبدیل های «غیر ایزومتري» هستند.

۴. ماتریس های تقارن

ماتریس های تقارن، ماتریس های تبدیلی هستند که هر نقطه ای در صفحه یا هر شکل هندسی را، روی قرینه اش



ج) ماتریس تقارن، نسبت به مبدأ مختصات: این ماتریس هر نقطه را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کند. در این حالت طول و عرض هر دو قرینه می‌شوند:

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -x \\ -y \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow B' \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

د) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (خط $y=x$): اگر نقطه‌ای نسبت به خط $y=x$ قرینه شود، جای طول و عرض آن عوض می‌شود:

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow B' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ه) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم (خط $y=-x$): اگر نقطه‌ای نسبت به خط $y=-x$ قرینه شود، طول

نسبت به یک خط یا یک نقطه، تصویر می‌کند و مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

الف) ماتریس تقارن نسبت به محور x ها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور x ها قرینه می‌کند. یعنی نقطه $A = (x, y)$ را به نقطه $A' = (x, -y)$ تبدیل می‌کند. در این حالت، عرض نقطه قرینه می‌شود. این ماتریس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow B' \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تقارن نسبت به محور y ها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور y ها قرینه می‌کند. در این حالت x است که قرینه می‌شود:

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow B' \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و عرض آن هم قرینه می شوند و هم جایشان عوض می شود:

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -y \\ -x \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \\ A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و) ماتریس دوران حول مبدأ به اندازه زاویه α : اگر نقطه ای تحت تأثیر این ماتریس قرار بگیرد، حول مبدأ به اندازه زاویه α دوران می کند. اگر دایره مثلثاتی (دایره به شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات) را در نظر بگیریم مطابق

شکل، نقطه $A \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix}$ به نقطه $A' \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix}$ تبدیل می شود و نقطه

$$B \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ به نقطه } B' \begin{vmatrix} \cos \alpha (\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ \sin \alpha (\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{vmatrix} \text{ یا } B' \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow T = R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix}$$

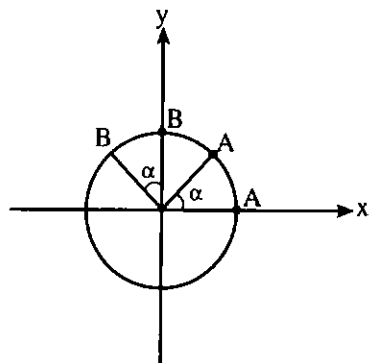
$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{vmatrix}$$

(محور x ها را محور کسینوس ها و محور y ها را محور سینوس ها در نظر می گیریم.)

مثال: دوران یافته نقطه

$$A \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{vmatrix} \text{ را حول}$$

مبدأ، به اندازه زاویه 45° بیاورد.



$$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نکته مهم: ماتریس های دوران حول مبدأ همواره طول و زاویه را ثابت نگه می دارند؛ یعنی شکل حاصل از دوران بر شکل اولیه قابل انطباق است.

توجه دارید که اگر R_α ماتریس دوران و دلخواهی باشد، همواره $|R_\alpha| = 1$ است و اگر هر ستون R_α را یک بردار فرض کنیم، همواره، طول هر بردار (بردار ستونی) در R_α نیز برابر ۱ است و دو بردار ستونی بر هم عمودند (ضرب داخلی آن ها صفر می شود.)

آزمون: دوران یافته منحنی به معادله $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$ حول مبدأ، به اندازه زاویه 90° کدام است؟

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 6 \text{ (الف)}$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 6 \text{ (ب)}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 6 \text{ (ج)}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 6 \text{ (د)}$$

حل: گزینه ج صحیح است؛ زیرا منحنی مفروض دایره ای

است به مرکز $w \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ و به شعاع $\sqrt{6}$ که با توجه به نکته قبل،

شکل حاصل پس از دوران نیز دایره است و شعاع آن همان شعاع دایره قبلی است، پس برای نوشتن معادله آن کافی است مرکز دایره تبدیل یافته را با دوران دادن مرکز دایره مفروض به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = w'$$

$$\text{معادله دایره } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 6$$

تذکر: هرگاه بخواهیم تأثیر ماتریس تبدیل T را روی یک خط یا یک منحنی به دست آوریم، کافی است T را

روی نقطه دلخواهی چون $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اثر بدهیم و حاصل را به

صورت $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ بنویسیم، سپس x و y را بر حسب x' و y'

بیابیم و در معادله داده شده قرار دهیم تا معادله تبدیل یافته به دست آید.

مثال: منحنی به معادله $2y - 3x^2 = 2$ مفروض است. این منحنی را حول مبدأ به اندازه $\frac{\pi}{6}$ دوران می دهیم. معادله منحنی حاصل را به دست آورید.

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = y' \end{cases}$$

طرفین معادله (۱) را در $\sqrt{3}$ ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3}x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = y' \end{cases} \Rightarrow 2x = \sqrt{3}x' + y' \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$$

طرفین معادله (۲) را در $-\sqrt{3}$ ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = x' \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y = -\sqrt{3}y' \end{cases} \Rightarrow -2y = x' - \sqrt{3}y' \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}y' + x'}{2}$$

$$2y - 3x^2 = 2 \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}y' + x'}{2}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y' + x' - 3\left(\frac{3x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{3}x'y'}{4}\right) = 2$$

$$\Rightarrow -9x'^2 - 3y'^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 4\sqrt{3}y' - 4x' = 8$$

معادله جدید منحنی

رابطه‌ای مهم در ماتریس‌های دوران

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازه α باشد، در این صورت داریم:

$$(R_\alpha)^n = R_{n\alpha}$$

اثبات به روش استقرا:

$$n=1 \Rightarrow (R_\alpha)^1 = R_{1 \times \alpha} \Rightarrow R_\alpha = R_\alpha$$

(حکم به ازای $n=1$ برقرار است)

$$n=k \Rightarrow (R_\alpha)^k = R_{k\alpha} \quad \text{فرض استقرا}$$

$$n=k+1 \Rightarrow (R_\alpha)^{k+1} = R_{(k+1)\alpha} \quad \text{حکم استقرا}$$

$$(R_\alpha)^{k+1} = (R_\alpha)^k \times R_\alpha \quad \begin{matrix} \text{طبق} \\ \text{فرض} \end{matrix} \quad R_{k\alpha} \times R_\alpha$$

$$R_{k\alpha} \times R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha & -(\cos k\alpha \sin \alpha + \sin k\alpha \cos \alpha) \\ \sin k\alpha \cos \alpha + \cos k\alpha \sin \alpha & \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k\alpha + \alpha) & -\sin(k\alpha + \alpha) \\ \sin(k\alpha + \alpha) & \cos(k\alpha + \alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{bmatrix} = R_{(k+1)\alpha}$$

تذکر مهم: با توجه به اینکه

$$R_{2\pi} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix} = I, \quad \text{به راحتی می توان}$$

توان‌های بزرگ یک ماتریس دوران را به دست آورد و آن را محاسبه کرد، به این مثال توجه کنید:



کل (تبدیل های متوالی)، حاصل ضرب ماتریسی مفروض را به صورت $R_{75^\circ} \times R_{-20^\circ} \times R_{75^\circ}$ می توان نوشت که در آن مجموع زاویه ها 90° است. در واقع ابتدا 75° دوران صورت گرفته است، سپس 20° درجه و سرانجام 35° درجه که در مجموع می شود، 90° دوران. پس حاصل $R_{\frac{\pi}{2}}$ است.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ باشد، A^{1382} را

حساب کنید.

$$A = R_{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A^{1382} = (R_{\frac{\pi}{3}})^{1382} = R_{1382 \times \frac{\pi}{3}}$$

از طرفی:

$$A^6 = (R_{\frac{\pi}{3}})^6 = R_{6 \times \frac{\pi}{3}} = R_{2\pi} = I, 1382 = 230 \times 6 + 2$$

پس:

$$A^{1382} = (A^6)^{230} \times A^2 = (I)^{230} \times R_{\frac{2\pi}{3}} = I \times R_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$R_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) & -\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) & \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1382} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

آزمون: حاصل ضرب ماتریسی زیر کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \cos 35^\circ & -\sin 35^\circ \\ \sin 35^\circ & \cos 35^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

(الف)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

حل: گزینه ج صحیح است؛ زیرا با توجه به ماتریس تبدیل

آزمون: معادله منحنی $y^2 - x^2 = 1$ ، پس از تبدیل توسط

ماتریس $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(الف) $x^2 + y^2 = 1$

(ب) $x^2 - y^2 = 1$

(ج) $x^2 - y^2 = -1$

(د) $x^2 + y^2 = -1$

حل: روش اول:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x' \\ -x = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases}$$

$$y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow (x')^2 - (-y')^2 = 1 \Rightarrow x'^2 - y'^2 = 1$$

پس گزینه ب صحیح است.

روش دوم: منحنی مفروض یعنی $y^2 - x^2 = 1$ یک

بیضی قائم است و ماتریس T، ماتریس دوران حول مبدأ به

اندازه $\frac{\pi}{4}$ است پس بیضی قائم با دوران 90° به یک

بیضی افقی تبدیل می شود که بر بیضی قبل قابل انطباق

است؛ یعنی بیضی به معادله $x^2 - y^2 = 1$.

(هـ) ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ یا

$y = x \tan \alpha$ می خواهیم با تبدیل های متوالی، ماتریس

تبدیل کل را برای تقارن نسبت به خط $y = x \tan \alpha$ بیابیم:

خط $y = x \tan \alpha$ با جهت مثبت محور x ها زاویه α

می سازد. حال اگر، ابتدا نقاط صفحه را به اندازه $(-\alpha)$

دوران دهیم، خط مذکور بر محور x ها منطبق می شود،

سپس قرینه نقطه یا نقاط داده شده را نسبت به محور x ها به دست می آوریم و سرانجام کل نقاط صفحه را به اندازه α دوران می دهیم تا انحراف پدید آمدن جبران شود. ماتریس تبدیل کل از ضرب این سه ماتریس، به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \text{ماتریس تقارن نسبت به خط } y = mx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

مثال: نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ را نسبت به خط $y = 2x$ قرینه کنید و مختصات نقطه حاصل را بیابید.

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = \frac{-3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: اگر T ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ باشد و روی نقطه ای چون A اثر کند، نقطه A' به دست می آید که قرینه نقطه A نسبت به خط $y = mx$ است. حال اگر ماتریس T این بار روی A' اثر کند، چون آن را نسبت به همان خط $y = mx$ قرینه می کند، نقطه A به دست می آید. در حالت کلی اگر تعداد تأثیرهای ماتریس T روی نقطه A زوج باشد، قرینه A بر خودش منطبق می شود و اگر این تأثیرها فرد باشند، بر A' منطبق می شود. پس می توان نوشت:

$$T^{2k} = I \text{ و } T^{2k+1} = T$$

(ماتریس I یا تبدیل همانی، هر نقطه را بر خودش منطبق می کند، اما ماتریس T ، A را بر A' منطبق می کند)
مثال: ماتریس های A و B و C به صورت زیر معرفی می شوند. حاصل $A^{102} + B^{28} + 2C^{1381}$ را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: A و B و C ماتریس های تقارن هستند. پس داریم:

$$A^{102} = I, B^{28} = I, C^{1381} = C, C = -I$$

$$\Rightarrow A^{102} + B^{28} + 2C^{1381} = I + I - 2I = \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لازم به یادآوری است که ماتریس های انتقالی که بتوانند

هر نقطه مانند $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ را به نقطه $A' \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ منتقل کنند،

نمی توانند 2×2 باشند؛ زیرا برای مثال مبدأ مختصات یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ با هیچ ماتریس } 2 \times 2 \text{ قابل انتقال به } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ نیست.}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ و می باید این انتقال در صفحه ای}$$

به موازات صفحه xy در IR^3 و به ارتفاع واحد انجام پذیرد.

یعنی ابتدا باید نقطه مورد نظر مثلاً $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، روی چنین

صفحه ای تصویر شود و بایک ماتریس 3×3 که

$$T_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ نام دارد، به نقطه } A' \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \text{ انتقال}$$

یابد و سپس روی صفحه xy تصویر شود. این نوع تبدیل ها در صفحه IR^2 صورت نمی گیرند و فعلاً از بحث ما خارجند.

ان شاء الله در مقاله های بعدی، به آن ها خواهیم پرداخت.