



تاریخچه مجله های ریاضی ایران (۲۶)

است. در این صورت، هر مجموع اضافه ای که یک بازیکن به عنوان نتیجه تشریک مساعی به دست آورد، دیگری باید از دست بدهد. بنابراین، پرداخت جنبی نمی تواند کاری جز بی اثر کردن سود و زیانهای مزبور انجام دهد.

می توانیم از این حذف سود و زیانها، در ساده کردن جدول پی - آمد استفاده کنیم. برای این کار، $5 = 10 \times \frac{1}{2}$ را از تمام درایه های جدول کم می کنیم و به این ترتیب، آن را به صورت زیر درمی آوریم:

	X		Y		Z	
A	۳	-۳	-۴	۴	۲	-۲
B	-۱	۱	۴	-۴	-۲	۲
C	-۳	۳	۱	-۱	۳	-۳
D	۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱

در این صورت، ۵ اضافه ای را، که هر بازیکن در جدول اصلی دریافت می کند، می توان به عنوان جایزه شرکت در بازی در نظر گرفت، و این مقدار، به هیچ وجه در استراتژی بازی اثر نمی گذارد. در جدول پی - آمدی که هم اکنون در بالا نشان دادیم، مجموع دو درایه واقع در هر خانه صفر می شود؛ به عبارت دیگر، هر چه یک بازیکن می برد، دیگری می بازد. بازی با چنین جدول پی -

در سیرمان در مجله های ریاضی ایران به مجموعه مقالات و مسائل ریاضی رسیدیم و قسمتهای از مقاله نظریه بازیهای آن را انتخاب و نقل کردیم و اکنون قسمت آخر این مقاله را که به یکی از رشته های جدید ریاضیات پرداخته است، بازگو می کنیم:

۲. بازیهای صفر - مجموع

۲.۰۰ مقدمه

در آخرین تمرین، ملاحظه کردیم که در بازی با جدول پی - آمد

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۱	۹	۷	۳
B	۴	۶	۹	۱	۳	۷
C	۲	۸	۶	۴	۸	۲
D	۶	۴	۴	۶	۶	۴

در غیاب پرداختهای جنبی، برای تشریک مساعی، انگیزه ای به بازیکنها ارائه نمی شود. اگر فرض کنیم که جایزه شرکت در این بازی، وجوه نقدی است، در این صورت می توانیم بسادگی نشان دهیم که حتی اگر پرداختهای جنبی هم مجاز باشد، در تشریک مساعی فایده ای نخواهد داشت. دلیل این مطلب، آن است که کل دستاورد هر دو بازیکن، بی توجه به نتیجه بازی، یکسان (۱۰)

درایه هر سطر را در نظر گرفته، سپس سطر شامل ماکزیمم این می نیمها را انتخاب می کند، و با این انتخاب، اطمینان می یابد که حداقل به مبلغ μ ، که در آن

$$\mu = \max_i (\min_j a_{ij}) \quad (1)$$

است، خواهد رسید. به روشی مشابه، هنگامی که R ستون j را انتخاب می کند، می داند که حداقل، کوچکترین درایه های ایرانیک اکنون نامرئی واقع در این ستون، یعنی، حداقل $\min_i (-a_{ij})$ را دریافت خواهد کرد و تا سر حد امکان، برای بزرگتر کردن این مقدار، ستونی را که آن را ماکزیمم می کند، برمی گزیند، و به این طریق، می تواند به دریافت حداقل v ، که در آن

$$v = \max_j (\min_i (-a_{ij})) \quad (2)$$

است، مطمئن شود.

می توان برای v فرمول معادلی را که بیش از آن که به درد نظریه بخورد مناسب محاسبه هاست، با استفاده از معادله (۲) و به طریق زیر، به دست آورد:

$$\begin{aligned} v &= \max_j (\min_i (-a_{ij})) \\ &= \max_j (-\max_i a_{ij}) \\ &= -\min_j (\max_i a_{ij}) \end{aligned} \quad (3)$$

این فرمول دارای این تعبیر است که، بازیکن R ، با انتخاب ستون j ، آگاه است که حداکثر $\max_i a_{ij}$ را می پردازد و با انتخاب ستون مزبور که این مقدار را به حداقل می رساند، می تواند زیان خود را به $\min_j (\max_i a_{ij})$ ، که $-v$ است، منحصر کند.

برای توضیح این تعاریف، بار دیگر بازی بررسی شده در آغاز این بخش را، مورد بررسی قرار می دهیم، و این بار، جدول مورد بحث را برای نشان دادن می نیم هر سطر (برای محاسبه μ) و ماکزیمم هر ستون (برای محاسبه v از معادله (۳)) افزایش می دهیم.

آمدی به بازی صفر - مجموع^۱ (دقیق تر، بازی صفر - مجموع دو نفری^۲) موسوم است. تعبیر اقتصادی آن، رجوع به وضعیتی دارد که در آن، دو شخص یا گروه، برای مقدار ثابتی کالا به رقابت می پردازند. از لحاظ ریاضی، این بازی، از نوعی است که به بهترین وجهی توضیح داده می شود، و اساساً بدین علت است که در مورد آن، اجبار نداریم که اوضاع بفرنج حاصل از امکان تشریک مساعی را به حساب آوریم. در بقیه مقاله، تنها به این نوع بازی خواهیم پرداخت.

۲. ۱. دستاوردهای تضمین شده

تحلیل بازیهای صفر - مجموع عمومیمان را با بررسی این مطلب که زمانی که بازیکنان، با توجه به روش قبلاً موصوف، به بازیها با احتیاط می پردازند چه اتفاقی می افتد، آغاز می کنیم. از آن جا که در این مرحله $b_{ij} = -a_{ij}$ به ازای جميع مقادیر i و j برقرار است، می توانیم جدول بی - آمد را با حذف درایه های با حروف ایرانیک ساده کنیم، و بنابراین، جدول مزبور به صورت زیر به نظر خواهد رسید:

	۱	۲	...	n
۱	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
۲	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

هنگامی که B سطر i را انتخاب می کند، می داند بی توجه به عملی که بازیکن دوم انجام می دهد، حداقل به کمترین مقدار نشان داده شده در سطر i خواهد رسید؛ این مقدار را به صورت زیر می نویسیم:

$$\min_j a_{ij}$$

واضح است که خواست او بر این است که می نیم تضمین شده مورد بحث، تا آن جا که امکان دارد بزرگ باشد، و به این مقصود می تواند با انتخاب سطری (یا یکی از سطرهایی) که $\min_j a_{ij}$ به ازای آن بیشترین است، نائل شود؛ یعنی، کوچکترین

کاغذ سنگ را ببوشاند
و مشابه با مشابه مساوی شود
حاصل خواهد شد

	۱	۲
۱	۰	۳
۲	۳	۰

(iii)

۲. در تمام مثالهای فوق، $\mu + v \leq 0$. آیا این موضوع همواره در مورد بازی صفر-مجموع صادق است؟ (راهنمایی: کل مبلغی را که توسط R و B، به صورت مشترک به دست آمده، در نظر بگیرید.)

یادداشتها

۱- Zero - sum Game

۲- Two - Person zero - sum Game



تماشای این اعداد و اعمال ضرب و جمع، خالی از تعجب و تفریح نیست.

$9+9=18$	$47+2=49$	$497+2=499$
$9 \times 9=81$	$47 \times 2=94$	$497 \times 2=994$
$24+3=27$	$263+2=265$	$12 \times 12=144$
$24 \times 3=72$	$263 \times 2=526$	$21 \times 21=441$

$i \backslash j$	۱	۲	۳	می نیم سطر
۱	۳	-۴	۲	-۴
۲	-۱	۴	-۲	-۲
۳	-۳	۱	۳	-۳
۴	-۱	-۱	۱	-۱
ماکزیم ستون	۳	۴	۳	
	$\mu = -1$	$v = -3$		

B می تواند با انتخاب سطر ۴، مقدار زیانش را، بی توجه به عملی که R انجام می دهد، تا ۱ نگه دارد؛ و R می تواند با انتخاب ستون ۱ یا ۳، مقدار زیانش را، بی توجه به کاری که B می کند، تا ۳ نگه دارد.

تمرینها

۱. μ ، v و $\mu + v$ را در مورد بازیهای با جدول پی-آمد زیر محاسبه کنید.

	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۴	۳

(i)

	سنگ	قیچی	کاغذ
کاغذ	۰	-۱	۱
قیچی	۱	۰	-۱
سنگ	-۱	۱	۰

(ii)

این بازی می تواند توسط دو نفر که باید هر یک همزمان، یکی از دستهایشان را جلو آورند، اجرا شود. در این صورت، جدول پی-آمد فوق، با دست باز که «کاغذ» را نمایش می دهد، دو انگشت تشکیل دهنده V که «قیچی» را نشان می دهد و مشت گره شده که «سنگ» را نمایش می دهد؛ در صورتی که:

سنگ قیچی را کُند کند
قیچی کاغذ را ببرد