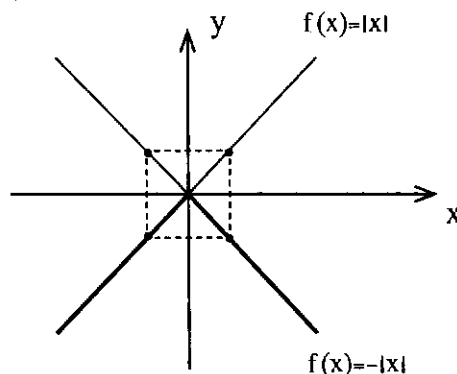


تابع چند جمله‌ای

اشاره

در شماره‌ی قبل به معرفی چند جمله‌ای و تابع چند جمله‌ای پرداختیم، در این شماره رسم توابع چند جمله‌ای را از طریق انتقال منحنی‌ها بررسی می‌کنیم.

تغییرات و انتقال منحنی‌ها تابع قدر مطلق را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



نمودار $f(x) = -|x|$ ، زاویه‌ی قائمه‌ای است که رأس آن بر مبدأ قرار دارد و دو ضلع آن، نیم‌سازهای ربع‌های سوم و چهارم محورهای مختصات هستند.

۲. رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$

اگر نقطه‌ی $M' \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right)$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه‌ی $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ |y_0| \end{smallmatrix} \right)$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ قرار دارد.

چنانچه منحنی تابع f به معادله‌ی $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور x ها باشد، آن گاه نمودار تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ نیز همان نمودار تابع f است. و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور x ها باشد، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ باید قرینه‌ی این قسمت از منحنی را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

۱. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$

اگر نقطه‌ی $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right)$ ، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله‌ی

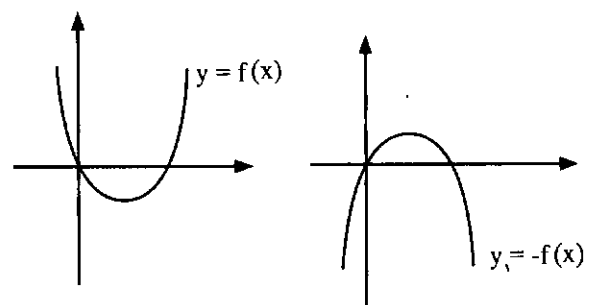
$y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه‌ی $M' \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{smallmatrix} \right)$ ، نقطه‌ای از منحنی

تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ است و برعکس:

اگر $M' \in y_1 \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right) \in f$

چون دو نقطه‌ی $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right)$ و $M' \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{smallmatrix} \right)$ نسبت به محور x ها

قرینه‌ی یکدیگر هستند، در نتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ باید قرینه‌ی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم. در شکل‌های زیر، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده‌اند.

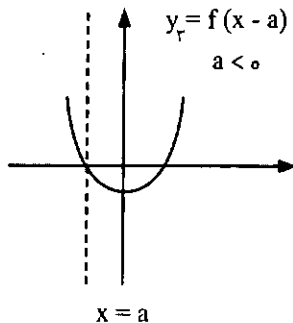
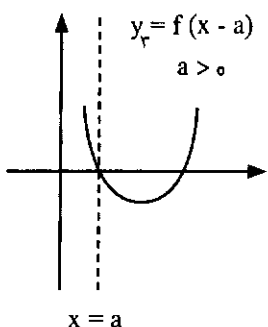
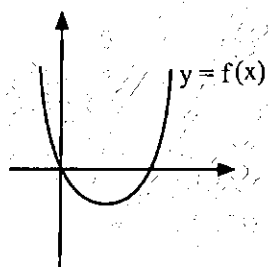


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار این تابع، کافی است قرینه‌ی نمودار

بنابراین، برای رسم تابع به معادله $y_r = f(x - a)$ کافی است کلیه نقاط منحنی تابع f را به اندازه $x = a$ در راستای محور x ها تغییر مکان دهیم.

اگر $a > 0$ ، آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت راست محور x ها انتقال می یابد و اگر $a < 0$ ، آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت چپ محور x ها انتقال می یابد.



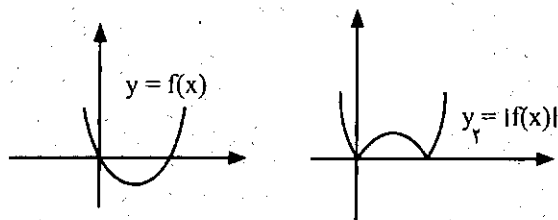
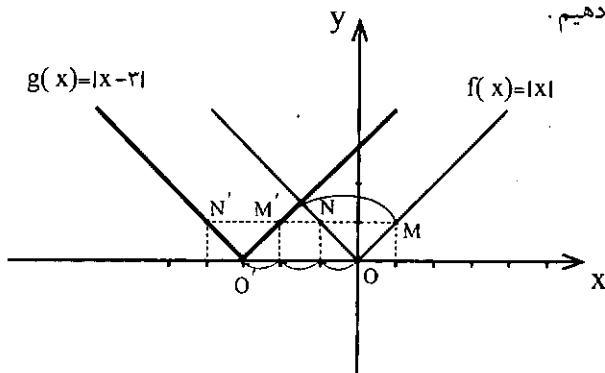
مثال: با کمک نمودار $f(x) = |x|$ نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

(۱) $g(x) = |x + 3|$

(۲) $h(x) = |x - \sqrt{2}|$

حل:

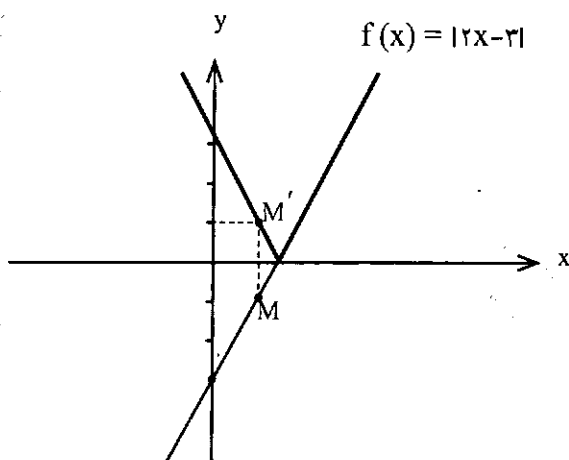
۱. برای رسم نمودار $g(x)$ کافی است نمودار تابع قدر مطلق را به اندازه $x = -3$ به سمت چپ محور x ها انتقال دهیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 3|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار خط به معادله $f(x) = 2x - 3$ را رسم می کنیم. سپس قرینه ی قسمتی از خط را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها به دست می آوریم.

$$f(x) = 2x - 3; \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{array}$$



۳. رسم تابع به معادله $y_r = f(x - a)$

اگر نقطه ی $M \begin{smallmatrix} x. \\ y. \end{smallmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه ی $M' \begin{smallmatrix} x. + a \\ y. \end{smallmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله $y_r = f(x - a)$ قرار دارد و بر عکس:

$$\text{اگر } M' \begin{smallmatrix} x. + a \\ y. \end{smallmatrix} \in y_r \Rightarrow y. = f(x. + a - a)$$

$$\Rightarrow y. = f(x.) \Rightarrow M \begin{smallmatrix} x. \\ y. \end{smallmatrix} \in f$$

پس می توان گفت، هر نقطه به طول x واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله $y_r = f(x - a)$ به نقطه ای به طول $(x. + a)$ تبدیل می شود.

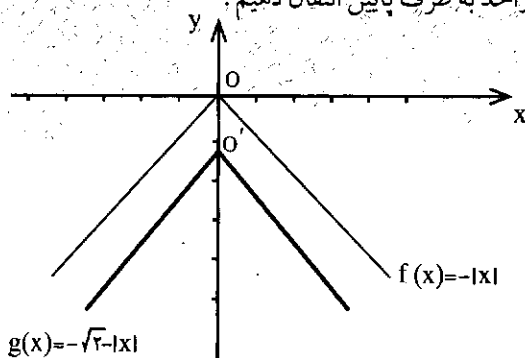
مثال: با استفاده از نمودار $f(x) = -|x|$ ، نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

(۱) $g(x) = -\sqrt{2} - |x|$

(۲) $h(x) = |2 - |x||$

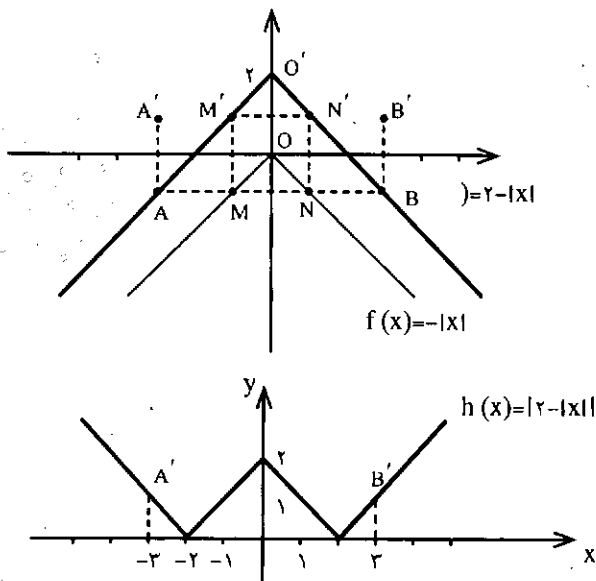
حل:

۱. برای رسم نمودار $g(x)$ کافی است نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -|x|$ را در راستای محور y ها به اندازه $\sqrt{2}$ واحد به طرف پایین انتقال دهیم.

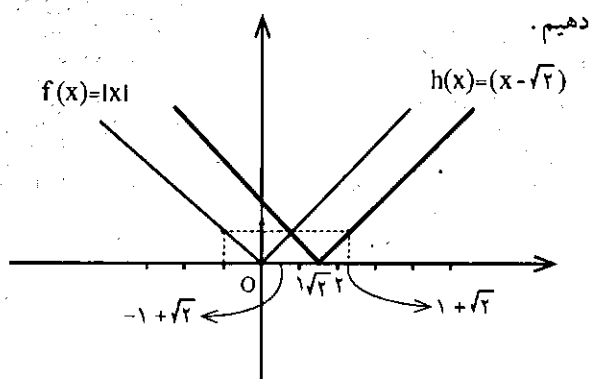


با توجه به نمودار تابع $g(x)$ ملاحظه می کنیم که $Rg = [-\infty, -\sqrt{2}]$

۲. برای رسم نمودار $h(x)$ ، ابتدا نمودار تابع با ضابطه $h_1(x) = 2 - |x|$ را رسم می کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -|x|$ را در راستای محور y ها به اندازه 2 واحد به طرف بالا انتقال دهیم، سپس برای رسم $h(x)$ باید قسمت هایی از نمودار $h_1(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



۲. برای رسم نمودار $h(x)$ کافی است نمودار تابع قدر مطلق را به اندازه $\sqrt{2}$ واحد به سمت راست محور x ها انتقال دهیم.



۴. رسم تابع به معادله $y_f = b + f(x)$

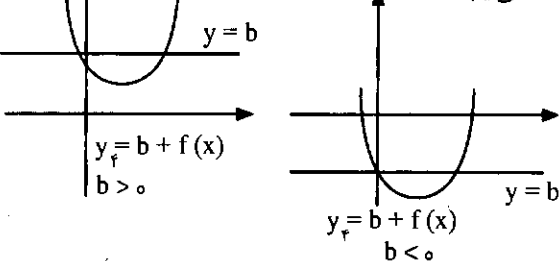
اگر نقطه $M(x, y)$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه $M'(x, b+y)$ روی منحنی تابع به معادله $y_f = b + f(x)$ قرار دارد و برعکس:

$$\text{اگر } M'(x, b+y) \in y_f \Rightarrow b+y = b+f(x) \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow M(x, y) \in f$$

پس هر نقطه به عرض y واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادله $y_f = b + f(x)$ ، به عرض $b+y$ تبدیل می شود.

در نتیجه، برای رسم تابع به معادله $y_f = b + f(x)$ کافی است کلیه ی نقاط منحنی تابع f را به اندازه $y=b$ در راستای محور y ها تغییر مکان دهیم.

اگر $b > 0$ ، آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y=b$ به طرف بالای محور y ها انتقال می یابد و اگر $b < 0$ ، آن گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y=b$ به طرف پایین محور y ها انتقال می یابد.

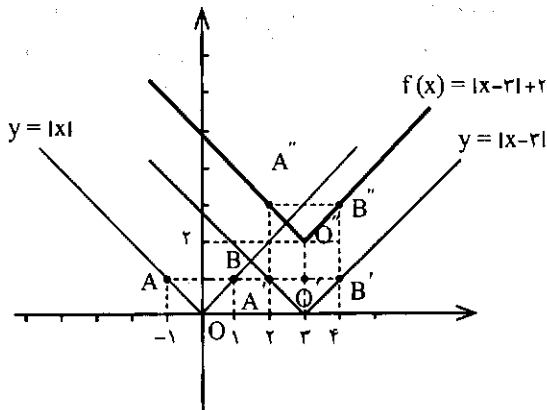


حل:

۱. برای رسم نمودار $f(x)$ ، ابتدا نمودار تابع قدر مطلق را رسم می‌کنیم. سپس در مرحله‌ی اول این نمودار را در راستای محور x ها به اندازه‌ی سه واحد به طرف راست منتقل می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم، نمودار به دست آمده را در راستای محور y ها به اندازه‌ی دو واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

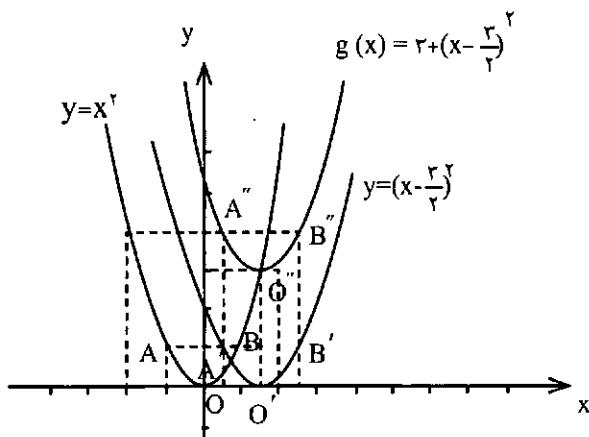
با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم:

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = [2, +\infty)$$



۲. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ ، ابتدا نمودار سهمی $y = x^2$ را رسم می‌کنیم. سپس در مرحله‌ی اول، این نمودار را در راستای محور x ها به اندازه‌ی $\frac{2}{3}$ واحد به طرف راست و در مرحله‌ی دوم نمودار به دست آمده را در راستای محور y ها به اندازه‌ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



برای این که قرینه‌ی قسمتی از نمودار زیر محور x ها را برای تابع $h_1(x)$ پیدا کنیم، دو نقطه مانند A, B روی آن در نظر گرفتیم سپس قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به محور x ها A' و B' نامیدیم و برای رسم نمودار تابع $h(x)$ ، از دو نقطه‌ی A' و B' استفاده کردیم.

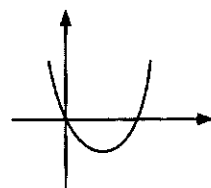
۵. رسم تابع به معادله‌ی $y_0 = b + f(x-a)$

در حقیقت، رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_f = b + f(x)$ و $y_r = f(x-a)$ است.

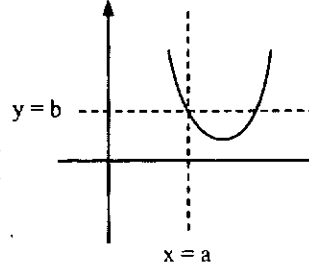
اگر نقطه‌ی $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ روی منحنی تابع f باشد، آن گاه نقطه‌ی $M' \begin{pmatrix} x_0 + a \\ y_0 + b \end{pmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_0 = b + f(x-a)$ واقع است و برعکس:

$$\text{اگر } M' \begin{pmatrix} x_0 + a \\ y_0 + b \end{pmatrix} \in y_0 = b + f(x-a) \Rightarrow y_0 + b = b + f(x_0 + a - a) \\ \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in y = f(x)$$

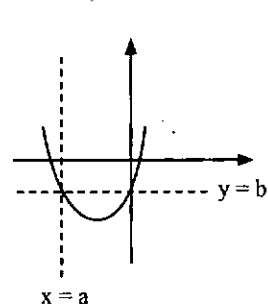
بنابراین، برای رسم نمودار این معادله کافی است، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه‌ی a در راستای محور x ها و به اندازه‌ی b در راستای محور y ها انتقال دهیم.



$$\begin{cases} y = b + f(x-a) \\ a, b > 0 \end{cases}$$



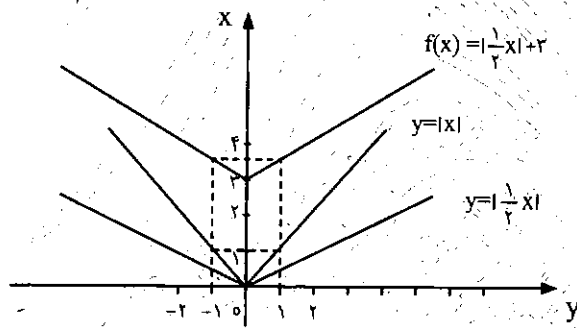
$$\begin{cases} y = b + f(x-a) \\ a, b < 0 \end{cases}$$



مثال: با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = |x|$ ، نمودار توابع زیر را رسم و سپس دامنه و برد هر کدام را محاسبه کنید.

$$(1) f(x) = |x-3| + 2$$

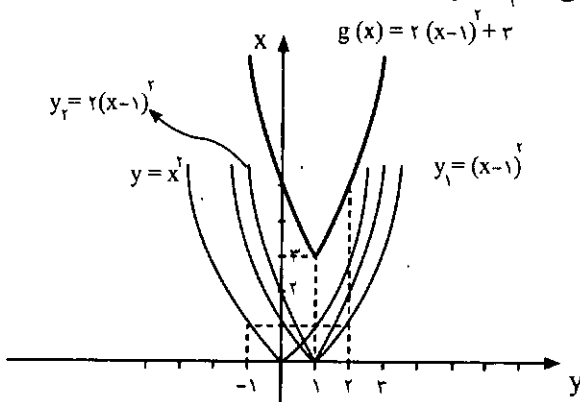
$$(2) g(x) = 3 + (x - \frac{2}{3})^2$$



با توجه به نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = [3, +\infty)$$

۲. برای رسم نمودار $g(x)$ ، در مرحله‌ی اول نمودار سهمی $y = x^2$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم، سهمی را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست محور x انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_1 = (x-1)^2$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار y_1 را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_2 = 2(x-1)^2$ به دست آید. در مرحله‌ی چهارم، عرض هر نقطه روی نمودار y_2 را در راستای محور y ها به اندازه‌ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $g(x)$ به دست آید.



مثال: از روی نمودار زیر، معادله‌ی تابع $f(x)$ را بنویسید.

حل:

مرحله‌ی اول:

$$y_1 = x^2$$

مرحله‌ی دوم:

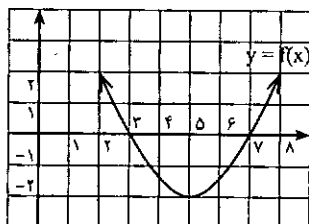
$$y_2 = (x-5)^2$$

مرحله‌ی سوم:

$$y_3 = \frac{1}{2}(x-5)^2$$

مرحله‌ی چهارم:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - 2$$



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که:

$$D_g = \mathbb{R}, R_g = [3, +\infty)$$

۶. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_f = kf(x)$

اگر نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه‌ی $M'(x_0, ky_0)$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_f = kf(x)$ است و برعکس:

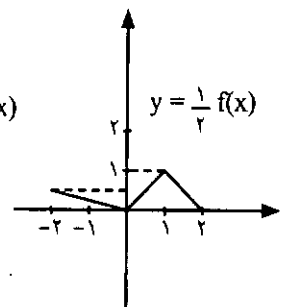
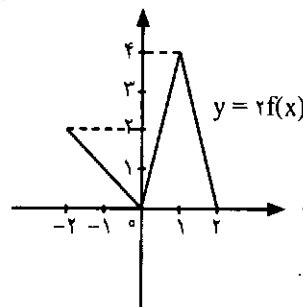
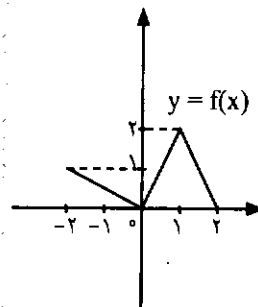
$$\text{اگر } M(x_0, ky_0) \in y_f \Rightarrow ky_0 = kf(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0, y_0) \in f$$

پس برای رسم تابع به معادله‌ی

$$y_f = kf(x)$$

از منحنی تابع f را (با حفظ طول

آن) در عدد k ضرب کنیم.



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \left| \frac{1}{2}x \right| + 3 \quad (1)$$

$$g(x) = 2(x-1)^2 + 3 \quad (2)$$

حل:

۱. برای رسم نمودار $f(x)$ ، در مرحله‌ی اول نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x|$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم عرض هر نقطه روی نمودار $f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_1 = \frac{1}{2}|x|$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار y_1 را در راستای محور y ها به اندازه‌ی سه واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x)$ به دست آید.