

تابع و بررسی خاصیت يك به يکی در انواع توابع

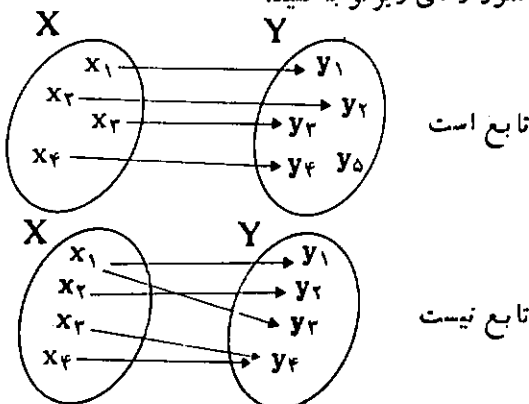
حمیدرضا امیری

(برای دانش آموزان سال‌های دوم و سوم و چهارم دبیرستان)

اینکه انواع رابطه‌ها چگونه اند و چه خواصی دارند از بحث ما خارج است و فقط ما نوع خاصی از این رابطه‌ها را که به آنها تابع می‌گوییم بررسی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

هر گاه رابطه R از A در B تعریف شده باشد آن را تابع می‌نامیم در صورتی که هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول برابر در آن یافت نشود، به عبارت دیگر، اگر مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب موجود در يك رابطه را دامنه و مجموعه مؤلفه‌های دوم آن رابطه را برد بنامیم، «رابطه‌ای تابع نام دارد که به ازای هر عضو از دامنه‌اش يکی فقط يك عضو از بردش وجود داشته باشد».

در حقیقت هر گاه نمودار پیکانی يك تابع را رسم کنیم نباید از هیچ يك از اعضای دامنه بیش از يك پیکان خارج شود. به نمودارهای زیر توجه کنید:



صحت از تابع است، مفهومی ریاضی که ریاضیات بدون آن هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال‌گیری از آن کتابهای ما را اشباع کرده و ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته است مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهم ایفا کند. پس جا دارد که خواص چنین مفهوم یا مفاهیمی را بیشتر مورد بررسی و تفحص قرار دهیم که فعلاً به بررسی يکی از این خواص یعنی خاصیت يك به يکی می‌پردازیم:

می‌دانیم هر گاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند خواهیم داشت:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

که هر (x, y) را يك زوج مرتب نامیده و از دوشیئی مانند x و y که برای آنها ترتیب قائل هستیم تشکیل شده است، و اگر:

$$(x, y) = (z, t)$$

خواهیم داشت:

$$x = z \wedge y = t$$

از طرفی هر زیرمجموعه از يك حاصل ضرب دکارتی مانند $A \times B$ را يك رابطه می‌نامیم پس اگر رابطه R از A در B تعریف شده باشد داریم:

$$R \subset A \times B$$

مثال ۲ - رابطه f را روی IR به صورت زیر تعریف می کنیم آیا این رابطه تابع است؟

$$\forall x, y \in IR, (x, y) \in f \iff x = y^2$$

فرض کنیم:

$$(x_1, y_1) \in f \wedge (x_1, y_2) \in f \implies$$

$$x_1 = y_1^2 \wedge x_1 = y_2^2$$

$$\implies y_1^2 = y_2^2 \implies y_1 = \pm y_2 \quad (1)$$

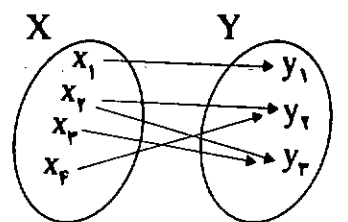
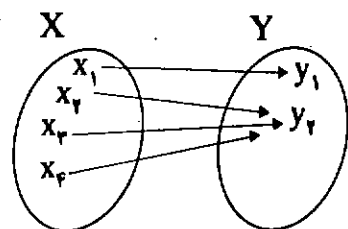
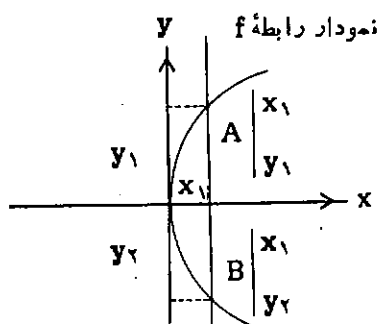
حال باید مثال نقض نشان می دهیم که رابطه f تابع نیست. برای به دست آوردن مثال نقض از رابطه (۱) استفاده می کنیم.

$$4 = (-2)^2 \wedge 4 = (2)^2 \implies$$

$$(4, -2) \in f \wedge (4, 2) \in f$$

یعنی دو زوج مرتب در f یافتیم که مؤلفه های اول برابر دارند لذا f تابع نیست.

لازم به تذکر است که هر زوج مرتب با مؤلفه های حقیقی را می توان متناظر با یک نقطه در صفحه مختصات دکارتی فرض کرد که مؤلفه اول آن مشخص کننده طول آن نقطه و مؤلفه دوم آن معین کننده عرض آن نقطه است. حال اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه های اول یکسان باشند در حقیقت دارای طولهای برابرند و لذا روی خطی موازی با محور y ها واقع اند پس هرگاه نمودار یک رابطه را رسم کنیم و خطوطی موازی محور y ها بکشیم اگر یکی از این خطوط نمودار رابطه را در بیش از یک نقطه قطع کند آن رابطه تابع نیست.



این مفهوم (تعریف تابع) را می توان با زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد:

$\iff$ رابطه f تابع است

$$[(x_1, y_1) \in f \wedge (x_1, y_2) \in f] \implies y_1 = y_2$$

(برای اثبات تابع بودن یک رابطه خودمان

فرض می کنیم دو زوج مرتب با مؤلفه های اول برابر در رابطه وجود داشته باشد و اگر با این فرض بتوانیم ثابت کنیم مؤلفه های دوم این دو زوج باهم برابرند در حقیقت دو زوج باهم برابر شده و ثابت کرده ایم که هیچگاه چنین زوجهای مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در رابطه نمی توان یافت.)

قرارداد: اگر $R \subset A \times A$ ، در این صورت اصطلاحاً می گوئیم رابطه R روی A تعریف شده است.

مثال ۱ - رابطه f روی IR (مجموعه اعداد حقیقی) به صورت زیر تعریف شده است آیا این رابطه تابع است؟

$$\forall x, y \in IR, (x, y) \in f \iff x^2 = y$$

فرض کنیم:

$$[(x_1, y_1) \in f \wedge (x_1, y_2) \in f] \implies$$

$$x_1^2 = y_1 \wedge x_1^2 = y_2 \implies y_1 = y_2$$

پس طبق تعریف تابع، رابطه فوق تابع می باشد.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 3 - 4x & x < 2 \end{cases}$$

چون $2 < -2$ پس:

$$f(-2) = 3 - 4(-2) = 3 + 8 = 11$$

چون $4 > 2$ پس:

$$f(4) = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$$

چون $2 = 2$ پس:

$$f(2) = 0$$

حال $f(a+3)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f(a+3) = \begin{cases} 2(a+3) - 5 & a+3 > 2 \\ 0 & a+3 = 2 \\ 3 - 4(a+3) & a+3 < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a+3) = \begin{cases} 2a+1 & a > -1 \\ 0 & a = -1 \\ -9-4a & a < -1 \end{cases}$$

و در نهایت به بررسی $f(|a|)$ می‌پردازیم:

می‌دانیم برای هر $a \in \mathbb{R}$ همواره $|a| \geq 0$ بنابراین

$$f(|a|) = \begin{cases} 2|a| - 5 & |a| > 2 \\ 0 & |a| = 2 \\ 3 - 4|a| & |a| < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(|a|) = \begin{cases} 2|a| - 5 & a > 2 \text{ یا } a < -2 \\ 0 & a = \pm 2 \\ 3 - 4|a| & -2 < a < 2 \end{cases}$$

قرارداد: اگر تابع f از A در B تعریف شده باشد این مطلب را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

یعنی تابع f روی x های مجموعه A اثر کرده و آنها را تحت قانون خاصی به اعضای y هایی در مجموعه B منتقل می‌کند پس $f(x)$ یعنی تأثیر f روی x که همان $y \in B$ است. اینکه f به چه صورتی روی x های مجموعه A اثر می‌کند، همان ضابطه تعریف f است که با $f(x)$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً وقتی می‌نویسیم $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ضابطه تعریف f به

$$f(x) = x^2 + 1$$

صورت $f(x) = x^2 + 1$ بیان شده است و این همان تغییری است که تابع f روی اعضای $\mathbb{Z}$ می‌دهد!

یعنی هر عدد صحیح که f بر آن اثر کند به توان ۲ می‌رسد و با عدد یک جمع می‌شود، پس اگر تابع f ضابطه فوق را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$f(4) = (4)^2 + 1 = 17$$

پس:

$$f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17$$

$$f(k) = k^2 + 1$$

یا

$$f(a+5) = (a+5)^2 + 1 = a^2 + 10a + 26$$

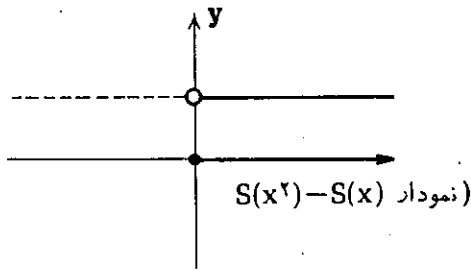
اگر دامنه تعریف یک تابع را به چند زیرمجموعه تقسیم کنیم می‌توان روی هر کدام از این زیرمجموعه‌های دامنه تعریف، یک ضابطه مجزا برای تابع تعریف کرد که به چنین توابعی، توابع چندضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال ۳ - تابع زیر یک تابع ۳ ضابطه‌ای است، مطلوب است محاسبه:

$$f(|a|), f(a+3), f(2), f(4), f(-2)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



قرارداد: اگر f تابعی از مجموعه A در مجموعه B باشد
یعنی $f: A \rightarrow B$ و اگر داشته باشیم $(x_1, y_1) \in f$ می‌نویسیم:
 $x \rightarrow f(x)$

$$f(x_1) = y_1$$

حال آمادگی داریم تا به بررسی یک خاصیت مهم برای
بعضی از توابع یعنی خاصیت یک به یکی پردازیم. توابعی که
دارای این خاصیت می‌باشند در ریاضیات از اهمیت ویژه‌ای
برخوردارند و در نظریه مجموعه‌ها نیز برای اثبات برقراری تناظر
یک به یک بین دو مجموعه می‌توان از تابع استفاده کرد و تابعی بین
آن دو مجموعه تعریف کرد که از جمله خواصی که آن تابع باید
دارا باشد همین خاصیت یک به یکی است.

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ مفروض است می‌گوییم این
 $x \rightarrow f(x)$

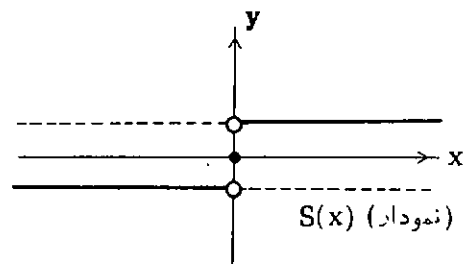
تابع یک به یک است هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های
دوم برابر در آن یافت نشود به بیان دیگر تابعی را یک به یک می‌نامیم
هرگاه به ازای هر عضو از بردش یکی و فقط یک عضو از دامنه‌اش
وجود داشته باشد.

$$\Rightarrow f(|a|) = \begin{cases} 2a - 5 & a > 2 \\ -2a - 5 & a < -2 \\ 0 & a = \pm 2 \\ 3 - 2a & 0 \leq a < 2 \\ 3 + 2a & -2 < a < 0 \end{cases}$$

مثال ۴ - تابع زیر را که به تابع علامت معروف است در
نظرمی‌گیریم:

$$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



مطلوب است محاسبه

$$S(x^2) - S(x) \text{ و } S(6) \text{ و } S(-5)$$

$$-5 < 0 \Rightarrow S(-5) = -1$$

$$6 > 0 \Rightarrow S(6) = 1$$

$$\text{اگر } x > 0 \Rightarrow (S(x) = 1 \text{ و } S(x^2) = 1)$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = 1 - 1 = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow (S(x) = -1 \text{ و } S(x^2) = 1)$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{اگر } x = 0 \Rightarrow (S(x) = 0 \text{ و } S(x^2) = 0)$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = 0 - 0 = 0$$

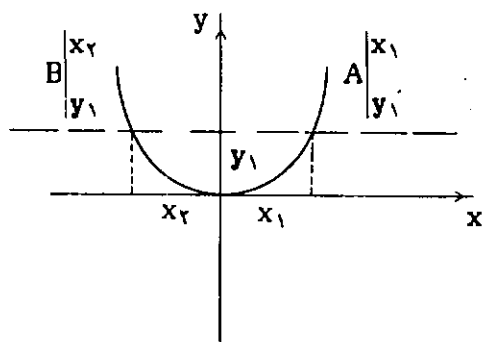
ریاضی تابع يك به يك را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad \text{تابع } f \text{ يك به يك است} \iff$$

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

با توجه به اینکه تابع f ، x_1 را به $f(x_1)$ و x_2 را به $f(x_2)$ تبدیل می کند واضح است که $f(x_1)$ و $f(x_2)$ هر دو مؤلفه های دوم دو زوج مرتب در تابع f می باشند که ما فرض کرده ایم با هم مساوی اند و ثابت می کنیم $x_1 = x_2$ یعنی باید مؤلفه های اول چنین زوجهای مرتبی نیز با هم برابر باشند درحقیقت دوزوج به يك زوج تبدیل می شوند پس تابع يك به يك خواهد شد.

اگر تابعی يك به يك نباشد پس حداقل دو زوج مرتب با مؤلفه های دوم برابر در آن یافت می شود که اگر این دو زوج را دو نقطه روی نمودار تابع بدانیم، چون عرضهای این دو نقطه برابر است پس هر دو روی خطی موازی با محور x ها واقع می شوند حال برای نشان دادن اینکه تابعی يك به يك نیست اگر نمودار تابع مفروض باشد می توان از عکس مطلب بالا استفاده کرد. یعنی اگر خطوطی موازی با محور x ها رسم کنیم و یکی از این خطوط نمودار تابع را در بیش از يك نقطه قطع کند آن نمودار نمی تواند به يك تابع يك به يك تعلق داشته باشد، به شکل زیر توجه کنید.

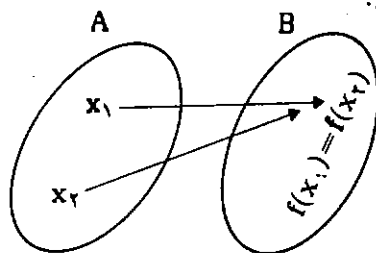


مثال ۵ - خاصیت يك به یکی را برای تابع باضابطه

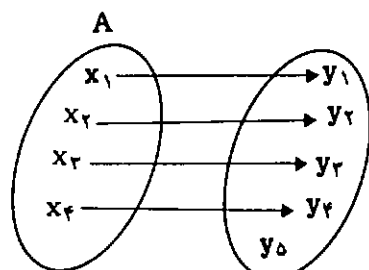
$$f(x) = \frac{x+4}{2x-3}$$

بررسی کنید.

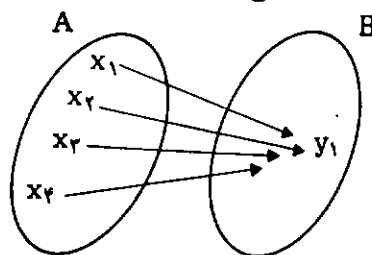
تذکره: لفظ يك به يك همان طور که از تعریف برمی آید کاملاً بانوع ونحوه عملکرد تابع مطابقت دارد یعنی واقعاً تابع هریکی را به یکی می برد اگر تابعی چنین نباشد، به صورت زیر خواهد بود.



و همان طور که مشاهده می شود این تابع دو به يك است!



تابع يك به يك است



تابع يك به يك نیست (تابع ثابت)

تعریف ریاضی تابع يك به يك

تابع $f: A \longrightarrow B$ يك تابع يك به يك است هر گاه:

$$x \mapsto f(x)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

حال با توجه به اینکه هر گزاره شرطی چون $p \implies q$ با عکس نقیض خودش یعنی $\sim p \implies \sim q$ هم ارز است پس تعریف

مثال ۷ - آیا تابع با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يك به يك $f(x) = |x|$

است؟

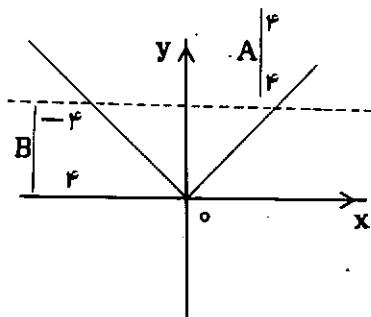
فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ پس خواهیم داشت:

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ و } x_2 = -4 \text{ : مثال نقض}$$

$$|x_1| = |4| = 4 \text{ و } |x_2| = |-4| = 4$$

نمودار تابع $f(x) = |x|$ به شکل زیر است و همان طور که مشاهده می شود تابع يك به يك نیست.



مثال ۸ - آیا تابع با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (a ∈ ℝ) $f(x) = |x+a|$

يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ پس خواهیم داشت:

$$|x_1 + a| = |x_2 + a| \Rightarrow$$

$$(x_1 + a) = \pm (x_2 + a) \Rightarrow$$

$$(x_1 + a) = (x_2 + a) \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \quad \text{I}$$



$$(x_1 + a) = -(x_2 + a) \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 - 2a} \quad \text{II}$$

پس دقیقاً نتوانستیم ثابت کنیم در هر حالت $x_1 = x_2$ حال به دنبال مثال نقض می باشیم که از رابطه II کمک می گیریم اگر قرار دهیم

فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{x_1 + 4}{2x_1 - 3} = \frac{x_2 + 4}{2x_2 - 3} \Rightarrow$$

$$2x_2x_1 - 3x_1 + 8x_2 - 12 = 2x_1x_2 +$$

$$8x_1 - 3x_2 - 12 \Rightarrow 11x_2 = 11x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ پس طبق تعریف تابع يك به يك است}$$

مثال ۹ - آیا تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 4$ با دامنه تعریف $\mathbb{R}$ يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ پس خواهیم داشت:

$$x_1^2 + 4 = x_2^2 + 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

در این نوع مسائل توجه داریم که اگر نتوانستیم ثابت کنیم که دقیقاً $x_1 = x_2$ دلیل بر يك به يك نبودن تابع نمی باشد و برای رد خاصیت يك به يکی تابع باید حتماً با يك مثال نقض این عمل انجام شود، که البته آخرین رابطه ای که بر حسب x_1 و x_2 به دست می آوریم به اینک که چگونه مثال نقض را بیابیم کمک می کند در مثال بالا چون داریم $x_1 = \pm x_2$ لذا اگر قرار دهیم

$$x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 2$$

خواهیم داشت:

$$f(x_1) = f(2) = 2^2 + 4 = 8$$

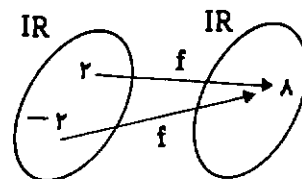
و

$$f(x_2) = f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$$

یعنی x_1 و x_2 ای در D_f یافتیم که $x_1 \neq x_2$ ولی

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ولذا تابع يك به يك نیست.



بررسی خاصیت يك به يكي برای توابع از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ و

از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ و از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$

اگر تابعی چون f از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ مفروض باشد در این صورت چون، $D_f \subset \mathbb{R}^2$ بنا بر این تابع f روی زوج مرتبهایی از $\mathbb{R}^2$ اثر کرده و حاصل عمل نیز زوج مرتبی منحصر به فرد از $\mathbb{R}^2$ خواهد بود ولی تعریف يك به يكي ثابت است و برای اینگونه توابع نیز به همان ترتیب عمل می کنیم یعنی فرض می کنیم تابع f روی دو زوج مرتب از $\mathbb{R}^2$ باهم مساوی باشد و ثابت می کنیم خود آن دو زوج مرتب باید باهم برابر باشند یعنی:

فرض می کنیم $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ و ثابت می کنیم

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

مثال ۱۰- تابع f با ضابطه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض

$$f(x, y) = (x - 6, y + 4)$$

است، آیا این تابع يك به يك است؟

$$\Rightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow$$

$$(x_1 - 6, y_1 + 4) = (x_2 - 6, y_2 + 4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 6 = x_2 - 6 \\ y_1 + 4 = y_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

پس تابع يك به يك است.

مثال ۱۱- تابع f با ضابطه

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x - 3y, 2x + y)$$

مفروض است آیا این تابع يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ پس با توجه به

ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$x_1 = -2 - 2a, \quad x_2 = 2$$

$$f(x_1) = f(-2 - 2a) = |-2 - 2a + a|$$

$$= |-2 - a| = |-(2 + a)| = |2 + a|$$

$$f(x_2) = f(2) = |2 + a|$$

و همان طور که مشاهده می شود $x_1 \neq x_2$ ولی

$$f(x_1) = f(x_2)$$

پس تابع يك به يك نمی باشد.

مثال ۹- آیا تابع با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يك به يك

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - 4}{3 + \sqrt{x}}$$

است؟

(قابل توجه است که دامنه تعریف تابع فوق زیر مجموعه

$\mathbb{R}^+$ می باشد در حقیقت $D_f = \mathbb{R}^+$ زیرا در غیر این صورت

$\sqrt{x}$ تعریف نمی شود) حال فرض کنیم

$$f(x_1) = f(x_2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{2x_1} - 4}{3 + \sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{2x_2} - 4}{3 + \sqrt{x_2}} \Rightarrow$$

$$3\sqrt{2x_1} - 12 + \sqrt{2x_1 x_2} - 4\sqrt{x_2} =$$

$$3\sqrt{2x_2} - 12 + \sqrt{2x_1 x_2} - 4\sqrt{x_1}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2}\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_1} = 3\sqrt{2}\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{2} + 4)\sqrt{x_1} = (3\sqrt{2} + 4)\sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}^2 = \sqrt{x_2}^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$x_2, x_1 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع يك به يك است.

و مثلاً $y_1 = y_2 = 5$ خواهیم داشت:

$$(x_1, y_1) = (2, 5) \Rightarrow$$

$$f(2, 5) = (2^2 + 1, 5 - 4) = (5, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (-2, 5) \Rightarrow$$

$$f(-2, 5) = ((-2)^2 + 1, 5 - 4) = (5, 1)$$

یعنی ثابت شد

$$f(2, 5) = f(-2, 5) = (5, 1)$$

درحالی که $(2, 5) \neq (-2, 5)$ پس تابع یک به یک نمی باشد.

مثال ۱۳- اگر C_1 و C_2 اعداد حقیقی ثابتی باشند تابع با

ضابطه زیر یک به یک نمی باشد

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (c_1, c_2)$$

تابع یک به یک نیست، زیرا مثلاً خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}, \frac{3}{5}) = (c_1, c_2) \\ f(2, 3) = (c_1, c_2) \end{cases}$$

$$(2, 3) \neq (\sqrt{2}, \frac{3}{5}) \text{ در صورتی که}$$

مثال ۱۴- ثابت کنید تابع با ضابطه

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x - 2y, 2x - 4y)$$

نه یک به یک و نه پوششی است. فرض کنیم:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

و با توجه به ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$(x_1 - 2y_1, 2x_1 - 4y_1) = (x_2 - 2y_2, 2x_2 - 4y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \\ 2x_1 - 4y_1 = 2x_2 - 4y_2 \end{cases}$$

$$(x_1 - 2y_1, 2x_1 + y_1) = (x_2 - 2y_2, 2x_2 + y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \\ 6x_1 + 2y_1 = 6x_2 + 2y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7x_1 = 7x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \quad (1)$$

حال مقدار $x_1 = x_2$ را در یکی از معادلات دستگاه قرار می دهیم که خواهیم داشت،

$$x_1 - 2y_1 = x_1 - 2y_2 \Rightarrow -2y_1 = -2y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

پس تابع یک به یک است.

مثال ۱۲- تابع f با ضابطه

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x^2 + 1, y - 4)$$

مفروض است. آیا این تابع یک به یک است؟

فرض کنیم:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

پس با توجه به ضابطه تابع خواهیم داشت،

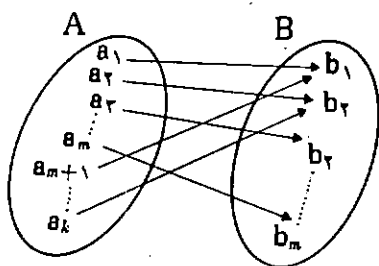
$$(x_1^2 + 1, y_1 - 4) = (x_2^2 + 1, y_2 - 4) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \\ y_1 - 4 = y_2 - 4 \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$$

بنابراین نمی توان نتیجه گرفت تابع یک به یک است پس به دنبال

مثال نقض هستیم که اگر قرار دهیم: $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$

يك به يك بودن f تناقض دارد. لذا هيچ تابع يك به يك از A به B نمي توان تعريف كرد.



مثال ۱۵- تابع با ضابطه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض

$$f(x, y) = x + y$$

است. خاصيت يك به يكي را براي آن بررسي كنيد.

فرض كنيم $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ پس با توجه به ضابطه

تعريف تابع داريم:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad (1)$$

لذا نتوانستيم ثابت كنيم $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ پس با توجه به رابطه (۱) به دنبال مثال نقض هستيم.

اگر قرار دهيم:

$$(x_1, y_1) = (5, -2), \quad (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(5, -2) = 5 + (-2) = 3 \\ f(1, 2) = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

پس ثابت شد $f(5, -2) = f(1, 2)$ ولي

$$(5, -2) \neq (1, 2)$$

پس تابع يك به يك نيست.

مثال ۱۶- تابع با ضابطه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض

$$f(x, y, z) = (x + y, z)$$

است. ثابت كنيد اين تابع يك به يك نيست. (اثبات به عهده خواننده).

و همان طور كه ملاحظه مي شود دستگاه بالا فاقد جواب است. (در حقيقت دو معادله $x - 2y = 0$ و $2x - 4y = 0$ يك معادله اند و خطي را مشخص مي كنند كه از مبدأ مختصات عبور مي كند) پس براي يافتن مثال نقض كافي است نقاطي را پايين كه در اين خط صدق مي كنند.

$$x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$f(0, 0) = (0 - 2 \times 0, 2 \times 0 - 4 \times 0) = (0, 0)$$

$$f(2, 1) = (2 - 2 \times 1, 2 \times 2 - 4 \times 1) = (0, 0)$$

يعني ثابت شد

$$f(0, 0) = f(2, 1) = (0, 0)$$

ولي $(0, 0) \neq (2, 1)$ پس تابع يك به يك نمي باشد.

حال پس از بررسي خاصيت يك به يكي براي توابع از

$\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ در حالتهاي مختلف به سراغ بررسي اين خاصيت براي توابع از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ مي رويم اما قبل از آن مطلبي را تحت عنوان يك قضيه ثابت كرده كه پس از اثبات آن فهم مطالب بعدي آسانتر مي نمايد.

قضيه: هرگاه $n(A) = k$ و $n(B) = m$ و $k > m$

(تعداد اعضاي مجموعه A بيشتر از تعداد اعضاي مجموعه B باشد).

در اين صورت هيچ تابع يك به يك از A به B نمي توان

تعريف كرد.

برهان: فرض كنيم $f: A \rightarrow B$ تابعي يك به يك باشد و

$D_f = A$ بنا بر اين f روي هر عضو A اثر مي كند و چون مجموعه

A دارای $(k - m)$ عضو بيشتر از مجموعه B است لذا ناچاراً

تابع f علاوه بر اينكه با m عضو A اعضاي B را مي پوشاند

بايد روي $(k - m)$ عضواي B دوبار اثر كند و اين با

تساوی $x_1^2 = x_2^2$ نتیجه می‌دهد $x_1 = \pm x_2$ بنابراین به دنبال مثال نقض هستیم مثلاً اگر قرار دهیم

$$(x_1 = 2 \text{ و } x_2 = -2 \text{ و } y_1 = y_2 = 4)$$

خواهیم داشت:

$$(x_1, y_1) = (2, 4) \text{ و } (x_2, y_2) = (-2, 4)$$

$$\Rightarrow f(2, 4) = (2^2, 4, 6) \text{ و}$$

$$f(-2, 4) = ((-2)^2, 4, 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2, 4) = (4, 4, 6) \\ f(-2, 4) = (4, 4, 6) \end{cases}$$

یعنی ثابت کردیم $f(2, 4) = f(-2, 4)$ ولی

$$(2, 4) \neq (-2, 4)$$

پس تابع يك به يك نیست.

در آخرین بحث این مقاله به بررسی خاصیت يك به یکی برای توابع چندضابطه‌ای می‌پردازیم درحقیقت به دنبال این مطلب هستیم که يك تابع چندضابطه‌ای با چه شرط یا شرطهایی دارای خاصیت يك به یکی است و آیا برقراری خاصیت يك به یکی در توابع چندضابطه‌ای نیاز به تحمیل شرط جدیدی دارد یا خیر؟

شاید در وهله اول تصور کنیم يك تابع چندضابطه‌ای اگر در تمام ضابطه‌هایش يك به يك باشد می‌توان نتیجه گرفت که در کل نیز يك به يك است، که تصویری غلط است!

این تصور را با يك مثال بسیار ساده می‌توان باطل کرد.

دیدیم تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يك تابع دوضابطه‌ای بود

$$f(x) = |x|$$

که فاقد خاصیت يك به یکی می‌باشد زیرا مثلاً:

$$f(-2) = f(2) = 2$$

ولی اگر قرار دهیم:

مثال ۱۷- تابع با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض

$$f(x) = (x, x+1)$$

است. خاصیت يك به یکی را برای این تابع بررسی کنید.

فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ پس با توجه به ضابطه تعریف

تابع داریم:

$$(x_1, x_1+1) = (x_2, x_2+1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1+1 = x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

در هر دو صورت ثابت شد $x_1 = x_2$ لذا تابع يك به يك است.

مثال ۱۸- تابع با ضابطه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض

$$f(x, y) = (x^2, x, y)$$

است. آیا این تابع يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ پس خواهیم داشت:

$$(x_1^2, x_1, y_1) = (x_2^2, x_2, y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

ازاینکه $x_1^2 = x_2^2$ نتیجه می‌شود که $x_1 = \pm x_2$ ولی با توجه به اینکه داریم $x_1 = x_2$ لذا همواره، $x_1 = x_2$ می‌باشد پس، $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ بنابراین تابع يك به يك است.

مثال ۱۹- تابع با ضابطه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض

$$f(x, y) = (x^2, y, 6)$$

است. آیا این تابع يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ بنابراین با توجه به

ضابطه تعریف تابع داریم:

$$(x_1^2, y_1, 6) = (x_2^2, y_2, 6) \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

مثال ۲۰- تابع f با ضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض

$$f(x) = \frac{x}{2+3|x|}$$

است. خاصیت یک به یکی را برای این تابع بررسی کنید.
ابتدا تابع را با توجه به تعریف قدر مطلق به صورت یک تابع دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2+3x} = f_1 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2-3x} = f_2 & x < 0 \end{cases}$$

حال خاصیت یک به یکی را برای هر دوضابطه به طور مجزا بررسی می کنیم.

$$\text{اگر } x_1, x_2 \geq 0, f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2+3x_1} = \frac{x_2}{2+3x_2}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3x_1x_2 = 2x_2 + 3x_1x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع $f_1(x) = \frac{x}{2+3x}$ برای x های بزرگتر یا مساوی صفر یک به یک است.

$$\text{اگر } x_1, x_2 < 0, f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2-3x_1} = \frac{x_2}{2-3x_2}$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 3x_1x_2 = 2x_2 - 3x_1x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

یعنی تابع $f_2(x) = \frac{x}{2-3x}$ برای $x < 0$ نیز یک به یک است.

لذا تابع $y = f(x)$ در هر دو ضابطه یک به یک است از طرفی واضح است که:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

و خاصیت یک به یکی را در هر ضابطه به طور مجزا بررسی کنیم خواهیم داشت:

$$\text{اگر } x_1, x_2 \geq 0, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{اگر } x_1, x_2 < 0, f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یعنی تابع $f(x) = |x|$ در هر یک از ضابطه هایش یک به یک است ولی در کل یک به یک نیست.

بنابر این ما علاوه بر اینکه خاصیت یک به یکی را در هر ضابطه یک تابع چندضابطه ای باید بررسی کنیم نیاز به بررسی شرط دیگری نیز داریم یعنی یک به یکی تمام ضابطه های یک تابع چند ضابطه ای برای یک به یک بودن تابع لازم است اما کافی نیست! حال به همان تابع $f(x) = |x|$ برمی گردیم، دیدیم که مثلاً:

$$f(-2) = f(2) = 2$$

یعنی عدد حقیقی ۲ هم در برد ضابطه بالایی و هم در برد ضابطه پایینی تابع قرار داشت لذا اگر هر ضابطه تابع را به عنوان تابعی مجزا فرض کنیم بردهای این دو تابع نقطه مشترک داشت.

این همان شرط اضافی است که به دنبالش بودیم.

یعنی اگر در یک تابع چندضابطه ای حتی بردهای دوضابطه تابع باهم اشتراك داشته باشند این مسأله را ايجاب می کند که تابع چندضابطه ای باید دو عضو متمایز از دامنه را تحت دوضابطه مختلف به یک عضو مشترک از بردش منتقل کند و این یک به یک بودن را نقض می کند لذا تعریف یک به یکی برای توابع چند ضابطه ای را به شکل زیر بیان می کنیم:

تابع $y = f(x)$ اگر تابعی با چندضابطه باشد در صورتی یک به یک است که «اولاً» در هر ضابطه اش یک به یک باشد و ثانیاً بردهای هیچ دوضابطه ای از ضابطه های آن نقطه مشترک نداشته باشند.»

مثال ۲۲- تابع باضابطه $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\infty, 0]$

$$f(x) = \log \cos x$$

مفروض است. آیا این تابع يك به يك است؟

فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ لذا با توجه به ضابطه تعریف تابع داریم:

$$\log \cos x_1 = \log \cos x_2 \Rightarrow \cos x_1 = \cos x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2k\pi \pm x_2$$

و چون $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ پس $x_1 = x_2$ در نتیجه تابع يك به يك است.

مثال ۲۳- تابع باضابطه $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

آیا این تابع يك به يك است؟

يك به يك بودن هر ضابطه در دامنه خودش بدیهی است و بردسی آن به عهده خواننده! حال به تعیین برد و ضابطه می پردازیم اگر ضابطه بالایی را f_1 و پایینی را f_2 بنامیم.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0 \Rightarrow$$

$$f(n) = -\frac{n}{2} < 0 \Rightarrow R_{f_1} = \mathbb{Z}^-$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \frac{n-1}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{n-1}{2} \geq 0 \Rightarrow R_{f_2} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset \quad \text{پس تابع يك به يك است}$$

$$f_1 \text{ برد} = R_{f_1} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ و}$$

$$f_2 \text{ برد} = R_{f_2} \subseteq \mathbb{R}^-$$

زیرا اگر $x \geq 0$ در این صورت

$$f_1(x) = \frac{x}{2+3x} \geq 0$$

و اگر $x < 0$

$$f_2(x) = \frac{x}{2-3x} < 0$$

و چون $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset$ لذا تابع طبق تعریف يك به يك است.

مثال ۲۴- تابع f باضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 2 \\ x - 1 & 0 < x \leq 2 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

آیا این تابع يك به يك است.

اگر سد ضابطه این تابع را از بالا به پائین به ترتیب f_2, f_1 و f_3 بنامیم در این صورت با توجه به دامنه هر يك از این توابع خواهیم داشت:

$$R_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

$$R_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq +1\}$$

$$R_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

و همانطور که مشاهده می شود:

$$R_{f_2} \cap R_{f_3} = \{1\}$$

لذا طبق تعریف تابع يك به يك نمی باشد. در حقیقت می توان نوشت:

$$\begin{cases} f(0) = 0 + 1 = 1 \\ f(2) = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = f(2) \text{ و } 0 \neq 2$$

مثال ۲۴- فرض کنیم توابع f و g به ترتیب باضابطه‌های

$$g: A_2 \rightarrow B_2 \quad \text{و} \quad f: A_1 \rightarrow B_1$$

$$g(a_2) = b_2 \quad \quad f(a_1) = b_1$$

هر دو توابعی یک به یک باشند ثابت کنید که تابع h باضابطه زیر یک به یک است

$$h: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$$

$$h(a_1, a_2) = (f(a_1), g(a_2))$$

فرض کنیم $h(a_1, a_2) = h(a'_1, a'_2)$ ثابت می‌کنیم

$$(a_1, a_2) = (a'_1, a'_2)$$

$$h(a_1, a_2) = h(a'_1, a'_2) \Rightarrow$$

$$(f(a_1), g(a_2)) = (f(a'_1), g(a'_2)) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(a_1) = f(a'_1) \xRightarrow{f \text{ یک به یک است}} a_1 = a'_1 \\ g(a_2) = g(a'_2) \xRightarrow{g \text{ یک به یک است}} a_2 = a'_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2) = (a'_1, a'_2)$$

پس تابع یک به یک است.

مثال ۲۵- تابع باضابطه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض است.

$$f(x) = x^2 |x|$$

آیا این تابع یک به یک است؟

ابتدا تابع f را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot x = x^3 & x \geq 0 \\ x^2 \cdot (-x) = -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

حال در هر ضابطه خاصیت یک به یکی را بررسی می‌کنیم.

$$\text{اگر } x_1, x_2 \geq 0, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$x_1^3 = x_2^3 \xRightarrow{x_1, x_2 \geq 0} x_1 = x_2$$

$$\text{اگر } x_1, x_2 < 0, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \xRightarrow{x_1, x_2 < 0} x_1 = x_2$$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع در هر دو ضابطه‌اش یک به یک است.

از طرفی اگر ضابطه بالایی را f_1 و ضابطه پایینی را f_2 بنامیم

در این صورت خواهیم داشت:

$$R_{f_1} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad R_{f_2} = \mathbb{R}^-$$

و چون $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset$ پس در کل یک به یک است.

مثال ۲۶- بایک مثال نقض نشان دهید که تابع باضابطه

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x+y, xy)$$

یک به یک نیست.

$$f(1, -1) = (1+(-1), 1 \times (-1)) \Rightarrow$$

$$f(1, -1) = (0, -1)$$

$$f(-1, 1) = ((-1)+1, (-1) \times 1) \Rightarrow$$

$$f(-1, 1) = (0, -1)$$

یعنی ثابت کردیم $f(1, -1) = f(-1, 1)$ ولی

$$(1, -1) \neq (-1, 1)$$

بنابراین تابع دوهیچ است!

در خاتمه این مقاله متذکر می‌شوم که با توجه به محدودیت-

های موجود حتی الامکان سعی شده حالت‌هایی که احیاناً دانش آموزان

عزیز دچار ابهاماتی هستند بررسی شود و انشاء الله در شماره‌های

بعده به بررسی خاصیت پوشایی توابع نیز پرداخته خواهد شد.

