

تابع های متناوب و روش های محاسبه دوره تناوب آنها

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

مقدمه

زنگ و ۱۲ ساعت بعد، ۱۲ زنگ می زند. بدیهی است که ۱۳ ساعت بعد نیز یک زنگ می زند و چهارده ساعت بعد دو زنگ و تا آخر.

آیا می توانید تابعی معرفی کنید که تعداد زنگ های این ساعت را رأس ساعت T یعنی T ساعت بعد $(T \in \mathbb{N})$ نسبت به مبدأ مشخص کند؟ حتی اگر نتوانید ضابطه ای برای این تابع مشخص کنید، حداقل می توانید با اطمینان بگویید برای این تابع داریم: $f(T+12) = f(T)$ ؛ یعنی تکرارهای

توابع متناوب، کاربردهای بسیاری در سایر علوم نظیر فیزیک و مکانیک دارند و از این نظر، اهمیت زیادی دارند. بسیاری از فعالیت ها و یا پدیده ها، تکراری و یا به اصطلاح پریودیک هستند؛ مانند تعداد زنگ هایی که یک ساعت شماطه دار در زمان های متفاوت می زند. اگر زمان را از یک مبدأ دلخواه شروع کنیم، روشن است که اگر این مبدأ رأس ساعت ۱۲ یک روز باشد، یک ساعت بعد، این ساعت یک زنگ می زند، دو ساعت بعد دو

نیز درست

است:

$$f(x + (k+1)T) = f(x + kT + T)$$

$x + kT$ را مساوی y فرض می‌کنیم:

$$f(x + kT + T) = f(y + T) = f(y) = f(x + kT)$$

و طبق فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$f[x + (k+1)T] = f(x + kT) = f(x)$$

و حکم ثابت است.

از این قضیه، روشن می‌شود که برای هر دوره تناوب T ، همه مضرب‌های طبیعی آن نیز دوره تناوب تابع هستند.

ولی ما کوچک‌ترین عدد مثبت T را که به ازای آن $f(x + T) = f(x)$ است، به عنوان دوره تناوب اصلی می‌شناسیم و هدف یافتن آن است.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \cos ax$ با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{a}$ متناوب است ($a \neq 0$).

اثبات: مطابق تعریف تابع متناوب می‌نویسیم:

$$f(x + T) = \cos a(x + T) = \cos(ax + aT) = \cos ax$$

به کمک دستور حل معادله‌های مثلثاتی می‌نویسیم:

$$ax + aT = 2k\pi \pm ax$$

به ازای علامت مثبت خواهیم داشت:

$$ax + aT = 2k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{a}$$

به ازای علامت منفی برای T یک مقدار حقیقی ثابت به دست نمی‌آید (عبارتی بر حسب x به دست می‌آید). از این جا می‌توان نتیجه گرفت که تمام مضرب‌های صحیح و مثبت $\frac{2\pi}{a}$ ، دوره تناوب این تابع هستند و کوچک‌ترین

آن‌ها به ازای $k=1$ ، $T = \frac{2\pi}{a}$ می‌شود که همان دوره

این تابع هر ۱۲

ساعت یک بار است. برای

مثال $f(3) = f(15) = f(27) = \dots$ یعنی این

ساعت، ۳ ساعت بعد، ۱۵ ساعت بعد و ۲۷ ساعت بعد، یک تعداد (یعنی سه بار) زنگ می‌زند. این مثالی از یک تابع متناوب با دوره تناوب ۱۲ است.

تعریف: تابع f را متناوب گوئیم، هرگاه برای هر عضو دامنه آن مانند $x \in D_f$ ، مقداری ثابت و حقیقی مانند $T > 0$ یافت شود؛ به قسمی که اولاً $(x + T) \in D_f$ و ثانیاً $f(x + T) = f(x)$ باشد. T را یک دوره تناوب تابع می‌گوئیم. به سادگی می‌توان دریافت که دوره تناوب یک تابع متناوب منحصر به فرد نیست. درواقع، هیچ‌گاه این چنین نیست و ما این را با قضیه‌ای که در سطرهای بعد می‌آید، ثابت می‌کنیم. برای مثال تابع با ضابطه $f(x) = \sin x$ که در $\mathbb{R}$ تعریف شده است، هم با دوره تناوب 2π متناوب است و هم با دوره تناوب 4π . زیرا:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin x$$

قضیه: اگر تابع f با دوره تناوب T متناوب باشد، آن‌گاه با دوره تناوب nT نیز متناوب است. ($n \in \mathbb{N}$)

برهان: به کمک قضیه استقرای ریاضی، مطلب به سادگی قابل اثبات است. به عبارت دیگر، قضیه شرطی زیر را باید اثبات کنیم:

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow f(x + nT) = f(x)$$

درستی قضیه برای $n=1$ واضح است. فرض می‌کنیم قضیه برای $n=k$ نیز درست باشد؛ یعنی: $f(x + kT) = f(x)$. ثابت می‌کنیم قضیه برای $n=k+1$

تناوب اصلی است.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ متناوب نیست.

فرض کنیم f با دوره تناوب T متناوب باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$f(x+T) = [x+T] = [x]$$

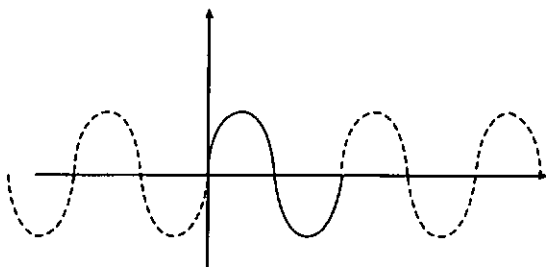
برابری فوق به ازای بعضی مقادیر x و بعضی مقادیر T برقرار است. برای مثال، اگر $x = 1$ باشد، برابری فوق به صورت $[1+T] = 1$ درمی آید که به ازای هر T متعلق به بازه $[0, 1)$ درست است. از این جا نتیجه می گیریم که مقدار معینی برای T به دست نمی آید و مقدار آن وابسته به x است. بنابراین تابع فوق متناوب نیست.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه های $f(x) = x^2$ و $g(x) = e^x$ متناوب نیستند.

تمرین: ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = \lg 2x$ متناوب است. کوچک ترین دوره تناوب آن را به دست آورید.

خاصیت هندسی تابع متناوب

با توجه به تساوی $f(x+T) = f(x)$ و آشنایی که دانش آموزان با رسم نمودار تابع $f(x+T)$ از روی نمودار $f(x)$ (انتقال یافته آن در جهت منفی محور x ها به اندازه T) دارند، نتیجه می گیریم که نمودار تابع متناوب در صورت جابه جایی با یک بردار انتقال به اندازه T در هر جهت تغییر نمی کند. به بیان ساده تر، نمودار تابع متناوب از انتقال بخشی از آن که در یک فاصله به طول T رسم شده است، به دست می آید. مثلاً برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در $\mathbb{R}$ ، می توان نمودار آن را در یک فاصله دلخواه به طول 2π مانند $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ رسم کرد و سپس با انتقال متناوب این نمودار، به نمودار کامل رسید.



روش های به دست آوردن دوره تناوب اصلی توابع متناوب

به دست آوردن دوره تناوب اصلی توابع متناوب از روی تعریف، همیشه کار آسانی نیست. برای سرعت بخشیدن به کار از قضیه های کلی استفاده می کنیم که به ترتیب آمده اند و بعضی را اثبات نیز کرده ایم و بقیه را به عنوان تمرین، به خوانندگان واگذار می کنیم. مثال هایی از کاربرد قضیه ها و چند تمرین نیز آورده ایم.

۱. دوره تناوب تابعی که به صورت توان های فرد

$\sin ax$ و $\cos ax$ ($a > 0$) هستند، برابر است با $T = \frac{2\pi}{a}$.

برهان: $f(x) = \sin^{2k+1} ax \Rightarrow f(x+T) = f(x)$

$$\sin^{2k+1} ax = \sin^{2k+1} a(x+T) \Rightarrow \sin ax = \sin(ax+aT)$$

$$ax + aT = 2k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{a} \quad k=1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

مقدار ثابتی برای T به دست نمی آید $\Rightarrow ax + aT = 2k\pi + \pi - ax \Rightarrow$

برای تابع با ضابطه $f(x) = \cos^{2k+1} ax$ نیز به طریق مشابه استدلال می شود.

مثال: دوره تناوب توابع با ضابطه $f(x) = \sin^5 2x$ و

$g(x) = 3\cos^7 5x$ به ترتیب، مساوی با $T_1 = \pi$ و $T_2 = \frac{2\pi}{5}$ است.

۲. دوره تناوب توان های زوج $\sin ax$ و $\cos ax$ ،

$a > 0$ مساوی است با: $T = \frac{\pi}{a}$.

برهان: $f(x) = \sin^{2k} ax \Rightarrow f(x+T) = f(x)$

$$\sin^{2k} a(x+T) = \sin^{2k} ax \Rightarrow \sin(ax+aT) = \pm \sin ax$$

$$\sin(ax+aT) = \sin ax \Rightarrow ax + aT = 2k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{a}$$

$$k=1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

مقدار ثابتی برای T به دست نمی آید $\Rightarrow ax + aT = 2k\pi + \pi - ax \Rightarrow$

کوچک‌ترین مضرب مشترک T_1 و T_2 ، متناوب است.

برهان: فرض کنیم $[T_1, T_2] = T$ در این صورت روشن است که $T = k_1 T_1 = k_2 T_2$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$h(x+T) = af(x+T) + bg(x+T) = af(x+k_1 T_1) + bg(x+k_2 T_2)$$

و چون f و g با دوره تناوب‌های T_1 و T_2 متناوبند، بنابراین:

$$h(x+T) = af(x) + bg(x)$$

اثبات این که T کوچک‌ترین دوره تناوب است را به عهده خواننده می‌گذاریم (فرض کنید h با دوره تناوب T' متناوب باشد، ثابت کنید $T \leq T'$).
از این قضیه، در تعیین دوره تناوب مجموع و تفاضل توابع متناوب نیز استفاده می‌شود.

مثال: تعیین دوره تناوب تابع با ضابطه

$$f(x) = 2\sin^2 5x - 4\cos^2 3x$$

حل: دوره تناوب تابع با ضابطه $\sin^2 5x$ مطابق قضیه

$$1, \text{ مساوی } \frac{2\pi}{5} \text{ و دوره تناوب تابع با ضابطه } \cos^2 3x$$

مطابق قضیه ۲، مساوی $\frac{\pi}{3}$ است. برای تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو کسر، آن‌ها را هم‌مخرج می‌کنیم و کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب عددی صحیح صورت‌ها را برمی‌گزینیم:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{15} \\ T_2 &= \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{30\pi}{15} \Rightarrow T = 2\pi$$

مثال: تعیین دوره تناوب تابع با ضابطه

$$f(x) = 5\lg^2 4x - 6\lg^2 3x + \cos^2 \frac{x}{3}$$

حل: به همان ترتیب مثال قبل می‌نویسیم:

$$\sin(ax+aT) = -\sin ax = \sin(-ax)$$

مقداری ثابت برای T به دست نمی‌آید $\Rightarrow ax+aT = 2k\pi - ax$

$$ax+aT = 2k\pi + \pi + ax \Rightarrow T = \frac{(2k+1)\pi}{a} \quad k=0 \Rightarrow T = \frac{\pi}{a}$$

بین دو مقدار $\frac{\pi}{a}$ و $\frac{2\pi}{a}$ مقدار کوچک‌تری یعنی $T = \frac{\pi}{a}$

دوره تناوب اصلی است. برای تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 kax$ نیز به همین شکل استدلال می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sin^2 3x$ و $g(x) = \cos^2 2x$ به ترتیب مساوی

$$\text{است با: } T_1 = \frac{\pi}{3} \text{ و } T_2 = \frac{\pi}{2}$$

۳. دوره تناوب توان‌های فرد یا زوج $\lg ax$ و

$$\cot ax \quad (a > 0) \text{ برابر است با } T = \frac{\pi}{a}$$

برهان به عهده خواننده است.

مثال: دوره تناوب توابع با ضابطه‌های $y = \lg^2 5x$ و

$$y = \cot^2 2x \text{ به ترتیب مساوی است با: } T_1 = \frac{\pi}{5} \text{ و } T_2 = \frac{\pi}{2}$$

توضیح: در هر یک از قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳، می‌توان به سادگی نشان داد که در حالت کلی (برای مقادیر مثبت یا

$$\text{منفی } a), T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ یا } T = \frac{\pi}{|a|}. \text{ از سوی دیگر به جای کمان}$$

ax ، ممکن است کمان $ax+b$ به کار رفته باشد. برای مثال

$$f(x) = \sin^2 (-3x+2) \text{ با ضابطه } f(x) = \sin^2 (-3x+2)$$

$$\text{مساوی است با: } T = \frac{2\pi}{3}$$

۴. هرگاه دو تابع با ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ با دوره

تناوب‌های T_1 و T_2 متناوب باشند، آن‌گاه تابع با ضابطه $h(x) = af(x) + bg(x)$ با دوره تناوب $[T_1, T_2]$ یعنی



$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} \times \frac{\cos 2x + 1}{2} = \frac{\cos 2x + 1 - \cos 2x - 1}{4} = 0$$

پس حاصل ضرب های صورت کسر را به مجموع تبدیل می کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos 2x + 1 - \cos 2x - 1}{4} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{\pi}{6} \quad T_2 = \frac{\pi}{11} \quad T_3 = \frac{\pi}{5} \\ T_4 = \frac{\pi}{7} \quad T_5 = \pi \quad T_6 = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow T = \pi$$

تمرین: دوره تناوب هریک از توابع معرفی شده با ضابطه های زیر را به دست آورید:

$$f(x) = \sin 4x \sin 3x$$

$$f(x) = \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{3x}{4}$$

$$f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}$$

$$f(x) = \tan^2 \frac{x}{2} \cot g^2 \frac{x}{3}$$

$$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x \cos \frac{x}{2}$$

۶. ترکیب توابع مثلثاتی و توابع غیر خطی $(ax + b)$ ، متناوب نیستند.

مثال: توابع با ضابطه $f(x) = \sin x^2$ و

$$g(x) = \tan \frac{1}{x} \text{ متناوب نیستند.}$$

۷. مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم یک تابع

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{\pi}{4} \\ T_2 = \frac{\pi}{3} \\ T_3 = \frac{\pi}{1} = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{12} \\ T_2 = \frac{4\pi}{12} \\ T_3 = \frac{12\pi}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

تمرین های قضیه ۴

دوره تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را مشخص کنید:

$$f(x) = 2 \sin^2 \Delta x - 5 \cos^2 2x + \tan^2 x$$

$$f(x) = 2 \cos^2 \Delta x - \sin^2 3x + \cot g^2 x$$

$$f(x) = \tan \frac{x}{2} - 2 \cot g^2 \frac{x}{3} + \sin^2 \frac{2x}{5}$$

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2} + \cos^2 \frac{\pi x}{3} - \tan^2 \pi x$$

$$f(x) = 2 \sin^2 \frac{2\pi x}{3} - \cos^2 \frac{\pi x}{2} + \tan^2 \frac{\pi x}{4}$$

۵. هرگاه حاصل ضربی از توابع مثلثاتی داشته باشیم، برای تعیین دوره تناوب تابع اصلی، ابتدا به کمک اتحاد های مثلثاتی، عبارت را به جمع تبدیل می کنیم و دوره تناوب آن را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sin \Delta x \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \text{مثال:}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\Delta x + \frac{x}{2} \right) + \sin \left(\Delta x - \frac{x}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \sin \frac{11x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{9x}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{11} = \frac{4\pi}{22} = \frac{12\pi}{66} \\ T_2 = \frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{18} = \frac{12\pi}{27} \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{132\pi}{66} = 2\pi \quad T = 2\pi$$

$$f(x) = \sin^2 \Delta x \cos^2 4x$$

$$\text{حل: از اتحاد های } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

متناوب و یک تابع غیرمتناوب، تابعی غیرمتناوب است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + \sin x$ و $g(x) = \sin x + \sin|x|$ متناوب نیستند.

۸. اگر g متناوب باشد، $f \circ g(x)$ نیز متناوب است با همان دوره تناوب تابع g .
برهان به عهده خواننده است.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \sin(\cos x)$ متناوب است و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است. تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\sin^3 x + \sin^2 x}$ نیز متناوب و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است.

۹. اگر f تابعی زوج باشد، توابع با ضابطه‌های $f(\cos x)$ و $f(\sin x)$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ متناوب هستند.
برهان به عهده خواننده است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x) = |\sin^2 x|$ و $g(x) = \cos(\sin^2 x)$ به ترتیب با دوره تناوب‌های $T_1 = \frac{\pi}{3}$ و $T_2 = \frac{\pi}{4}$ و $T_3 = \frac{\pi}{5}$ متناوب هستند.

۱۰. اگر f تابعی زوج باشد، تابع با ضابطه $f(\sin x) + f(\cos x)$ با دوره تناوب $T = \frac{\pi}{2a}$ متناوب است.
برهان به عهده خواننده است.

مثال: تابع‌های با ضابطه $f(x) = |\sin^2 x| + |\cos^2 x|$ به ترتیب با دوره تناوب‌های $T_1 = \frac{\pi}{4}$ و $T_2 = \frac{\pi}{2}$ متناوب هستند.

۱۱. دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan ax - \cot ax$ و هر مضربی از آن مساوی $T = \frac{\pi}{2a}$ است.

برهان: به کمک اتحادهای مثلثاتی می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sin ax}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{\sin ax} = \frac{\sin^2 ax - \cos^2 ax}{\sin ax \cos ax} =$$

$$\frac{-\cos 2ax}{\frac{1}{2} \sin 2ax} = -2 \cot 2ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{2a}$$

مثال: برای تابع با ضابطه $f(x) = \tan^3 x - \cot^3 x$

$$T = \frac{\pi}{6}$$

۱۲. در توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها شامل $\sin x$ و $\cos x$ هستند، در صورت امکان ساده شدن، قبل از محاسبه دوره تناوب، بهتر است صورت و مخرج کسر را بر $\sin x$ یا $\cos x$ (هر کدام مناسب‌ترند)، تقسیم می‌کنیم و سپس دوره تناوب آن را به دست می‌آوریم.
مثال: تعیین دوره تناوب تابع با ضابطه

$$f(x) = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - \cos x}$$

حل: از تقسیم صورت و مخرج کسر فوق بر $\cos x$ یا $\sin x$ (در این جا تفاوت نمی‌کند) خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{\tan x + 2}{\tan x - 1} \Rightarrow T = \pi$$

حال آن که اگر بدون این تبدیل، دوره تناوب را به دست می‌آوردیم، به مقدار $T = 2\pi$ می‌رسیدیم که دوره تناوب تابع f است، ولی کوچک‌ترین دوره تناوب نیست. البته باید توجه داشت که تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\tan x + 2}{\tan x - 1}$ ، با تابع اولیه برابر نیست. زیرا دامنه تعریف آن‌ها یکی نیست (چرا؟) ولی دوره تناوب آن‌ها یکی است.

تمرین: دوره تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را بیابید:

$$۱) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$۲) f(x) = \frac{\sin 2x}{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}$$

$$۳) f(x) = \frac{\sin^2 3x + 3 \cos^2 3x}{2 \sin^2 3x - 5 \cos^2 3x}$$