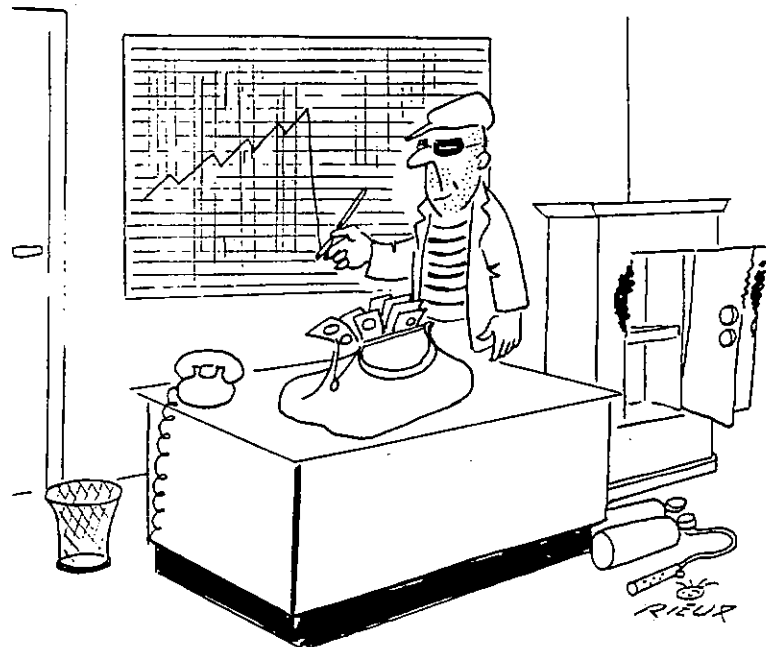


تابعهای صعودی و نزولی

(کاربرد قضیه مقدار میانگین)

(قسمت پنجم)

● محمد صادق عسگری



تعریف:

تابع f را روی بازه I صعودی (اکیداً صعودی) نامند، اگر برای هر $x_1, x_2 \in I$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ (یا $f(x_1) < f(x_2)$) را نزولی (اکیداً نزولی) نامند، اگر $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ (یا $f(x_1) > f(x_2)$).
تذکر: توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا می نامند.

قضیه (رابطه بین مشتق و توابع یکنوا)

فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه $[a, b]$ مشتق پذیر باشد.

الف- اگر برای هر $a < x < b$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آن گاه f اکیداً صعودی است.

ب- اگر برای هر $a < x < b$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آن گاه f اکیداً نزولی است.

اثبات: الف- فرض کنیم $a < x_1 < x_2 < b$ در این صورت تابع f روی بازه $[x_1, x_2]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین، صدق می کند. پس عدد c وجود دارد؛ به طوری که

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

چون $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ ، در نتیجه $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یا $f(x_2) > f(x_1)$ ؛ یعنی f اکیداً صعودی است.

ب- به طور مشابه در قسمت (ب) نیز داریم:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c')(x_2 - x_1), \quad x_1 < c' < x_2$$

چون $f'(c') < 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ ، در نتیجه $f(x_2) - f(x_1) < 0$ یا $f(x_2) < f(x_1)$ ؛ یعنی f اکیداً نزولی است.

نکته ۱: در قضیه بالا اگر داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ (یا $f'(x) \leq 0$)، در این صورت، حکم قضیه وقتی برقرار است که تعداد ریشه های معادله $f'(x) = 0$ متناهی باشد.

نکته ۲: برای تعیین فواصل یکنوایی تابع حقیقی f ، باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. جدول تعیین علامت مشتق را جدول تغییرات نمودار تابع f می گویند. همچنین نقطه ای به طول $x = c$ از دامنه تابع f را نقطه اکسترم نسبی f می گویند، هرگاه مشتق f در این نقطه، تغییر علامت دهد.

x	$-\infty$				1
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				2

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 8x + 12} - 3$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

برای مشتق‌گیری از توابع کسری به صورت

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \text{ می‌توان از فرمول}$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

استفاده کرد. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ بنابراین داریم:

$$f'(x) = \frac{-16x^2 + 48x}{(x^2 - 8x + 12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -16x^2 + 48x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	3	6	$+\infty$
y	2	0	0	0	0	2

x	$-\infty$	0	2	3	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	2	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	2

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} - 3$$

$$D_f = [0, 2\pi] - \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}, \quad f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

x	D_f	C
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$		$f(c)$ Max

x	D_f	C
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$		$f(c)$ Min

مثال ۳۷: محدود a را بیابید؛ به طوری که تابع $f(x) = \frac{ax-2}{x+2}$ همواره نزولی باشد.

حل: طبق قضیه، باید برای هر $x \neq -2$

داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{ax-2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2a+2}{(x+2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow 2a+2 < 0 \Rightarrow 2a < -2$$

$$\Rightarrow a < -1$$

مثال ۳۸: جهت تغییرات و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

توابع زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف. } f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3x^2 - 12x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(x-6)^2}}$$

x	$-\infty$	0	4	6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

x	y
$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0
4	$-2\sqrt[3]{4}$
6	0

$$\text{ب. } f(x) = 2x - \sqrt{1-x}$$

$$D_f =]-\infty, 1] \quad f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$$

تابع همواره صعودی است.

$$f(x) = x - \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \leq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

قضیه (رابطه بین نامساویها و مشتق)

اگر تابعهای f و g روی بازه‌های $[a, b]$ پیوسته و روی بازه $]a, b[$ مشتق پذیر باشند و $f(a) = g(a)$ و نیز برای هر x ، $a < x < b$ ، $f'(x) < g'(x)$ ، آن گاه برای هر x ، $a < x < b$ ، $f(x) < g(x)$.

اثبات: تابع $h(x) = f(x) - g(x)$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. h پیوسته است و روی بازه $]a, b[$ مشتق پذیر است. و $h(a) = 0$ و برای هر x ، $a < x < b$ ، $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$. پس طبق قضیه، h تابعی اکیداً نزولی است. در نتیجه داریم:

$$a < x < b \Rightarrow h(a) > h(x) \Rightarrow 0 > h(x)$$

$$\Rightarrow 0 > f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

مثال ۴۱: نشان دهید اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، آن گاه برای هر x حقیقی مثبت، $(1+x)^n > 1+nx$.

حل: اگر $f(x) = 1+nx$ و $g(x) = (1+x)^n$ اختیار شوند، در این صورت این توابع روی بازه $]0, +\infty[$ پیوسته و روی $]0, +\infty[$ مشتق پذیرند و $f(0) = g(0) = 1$ و $f'(x) = n$ و $g'(x) = n(1+x)^{n-1}$. همچنین برای هر $x > 0$ داریم:

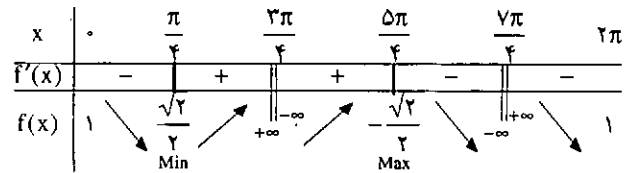
$$x > 0 \Rightarrow 1+x > 1 \Rightarrow (1+x)^{n-1} > 1$$

$$\Rightarrow n < n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه برای هر $x > 0$ ، باید داشته باشیم $f(x) < g(x)$ یا $(x+1)^n > 1+nx$.

مثال ۴۲: نشان دهید اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، آن گاه برای هر x حقیقی مثبت داریم: $\sqrt[n]{1+x^n} < 1+x$.

حل: اگر $f(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ و $g(x) = 1+x$ اختیار شوند، در این صورت، این توابع روی بازه $]0, +\infty[$ پیوسته و روی $]0, +\infty[$ مشتق پذیرند و $f(0) = g(0) = 1$ و $f'(x) = \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}}$ و $g'(x) = 1$.



x	y
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	1

مثال ۳۹: m را بیابید به طوری که برای هر x مثبت داشته

$$mx - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$$

حل: تابع مشتق پذیر $f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x}$ را روی بازه $]0, +\infty[$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض، باید داشته باشیم $y_{\min} = 0$.

$$y = mx - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = m - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow m - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{m}$$

اولاً $m > 0$: زیرا اگر m منفی باشد، آن گاه f می‌نیم نخواهد داشت.

$$x^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

ثانیاً نقطه $\frac{1}{\sqrt{m}}$ نقطه می‌نیم f است. در نتیجه داریم:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 0 \Rightarrow m \times \frac{1}{\sqrt{m}} - 1 + \sqrt{m} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

مثال ۴۰: حدود x را بیابید: به طوری که تابع با ضابطه

$$f(x) = x - \sqrt{x-1}$$

حل: باید داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، در نتیجه داریم:

پس طبق قضیه، برای هر $0 < x < \pi$ ، باید داشته باشیم
 $f(x) < g(x)$ یعنی: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ (**).

با توجه به روابط (*) و (**) برای هر $0 < x < \pi$ داریم:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

مثال ۴۴: ثابت کنید: برای هر $0 < x < \pi$ ،

$$x^2 - \frac{x^4}{6} - 1 < x \sin x + \cos x < x^2 + 1$$

حل: بنابر مثال ۴۳ داریم:

$$\begin{cases} -1 < \cos x < 1 \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos x < 1 \\ x^2 - \frac{x^4}{6} < x \sin x < x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{x^4}{6} - 1 < x \sin x + \cos x < x^2 + 1$$



به این دو عمل ریاضی توجه کنید که توجه به آنها خالی از تعجب نیست.

$$272 + 16 = (2 + 7) \times 2 \times 16$$

$$\sqrt{324} = 3 \times (2 + 4)$$

$g'(x) = 1$. همچنین برای هر $x > 0$ داریم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)^{\frac{n-1}{n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}} < 1 \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه، برای هر $x > 0$ ، باید داشته باشیم: $f(x) < g(x)$

$$\text{یا } \sqrt[n]{1+x^n} < 1+x$$

مثال ۴۳: ثابت کنید برای هر $0 < x < \pi$ ،

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $0 < x < \pi$ ، $\sin x < x$ ، توابع

$f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ را روی بازه $[0, \pi]$ در نظر می‌گیریم.

این توابع روی بازه $[0, \pi]$ پیوسته و روی بازه $]0, \pi[$ مشتق‌پذیرند

و $f(0) = g(0) = 0$ و $f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = 1$ چون برای هر

$0 < x < \pi$ ، داریم $\cos x < 1$ ، در نتیجه $f'(x) < g'(x)$. پس طبق

قضیه برای هر $0 < x < \pi$ ، داریم $f(x) < g(x)$ ؛ یعنی $\sin x < x$.

در قسمت دوم نشان می‌دهیم برای هر $0 < x < \pi$ ،

$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ (*). اگر $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$

اختیار شوند.

این تابعها روی بازه $[0, \pi]$ پیوسته و روی $]0, \pi[$ مشتق‌پذیرند

$$\text{و } f(0) = g(0) = 0 \text{ و } f'(x) = 1 - \frac{x^2}{3} \text{ و } g'(x) = \cos x$$

بنابر قسمت اول، برای هر $0 < x < \pi$ داریم:

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{x}{3} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{x^2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos x}{2} < \frac{x^2}{9} \Rightarrow 1 - \cos x < \frac{x^2}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} < \cos x \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$