



مدل سازی مقدماتی ریاضی

تابع های توانی و مدل های ریاضی

✪ ترجمه و تألیف: میرشهرام صدر

برای دانش آموزان
پایه دوم متوسطه

وقتی توپی را در امتداد قائم به هوا پرتاب می کنید، چه اتفاقی می افتد؟ آیا توپ با سرعت ثابتی به طرف بالا می رود و بعد روبه پائین حرکت می کند؟ آیا توپ برای رسیدن به بالاترین نقطه (نقطه اوج)، زمان بیش تری را صرف می کند یا در برگشت و رسیدن به نقطه اولیه پرتاب؟

توپی را روی یک دستگاه حرکت سنج^۱ به هوا پرتاب کرده ایم. شکل ۱، نمودار داده های به دست آمده در این آزمایش را نشان می دهد. حرکت سنج به دستگاهی وصل است که ارتفاع توپ (ارتفاع توپ تابعی از زمان است) را ثبت می کند. این نمودار چه اطلاعاتی درباره حرکت توپ به ما می دهد؟ ابتدا ملاحظه می کنیم که توپ از ارتفاع تقریباً ۳ فوتی روبه بالا پرتاب می شود و در ارتفاع کمی پائین تر از نقطه پرتاب (قبل از برخورد با حرکت سنج) گرفته می شود. ثانیاً آهنگ سرعت توپ ثابت نیست، زیرا فاصله طی شده از $0/6$ تا $0/7$ ثانیه، بیش تر از فاصله طی شده از $0/9$ تا 1 ثانیه است و بالاخره ملاحظه می کنید که مدت زمانی که برای بالا رفتن توپ سپری شده است با مدت

زمان پائین آمدن توپ یکسان است.

اگر بخواهیم مدل ریاضی رابطه بین زمان و ارتفاع توپ را بنویسیم، به طور قطع مدل خطی (تابع درجه اول) را انتخاب نمی کنیم، زیرا توپ در فاصله زمان های برابر، مسافت های مختلفی را طی کرده است. با استفاده از شکل ۱ ملاحظه می کنیم

نیست. از این رو نتیجه می‌گیریم که d تابعی درجه اول و خطی بر حسب t نیست. شما دانش‌آموزان می‌توانید تحقیق کنید که d تابعی از t است و از رابطه $d = 16t^2$ به دست می‌آید. توجه داشته باشید که در این تابع متغیر زمان، توان‌دار است.

تابع درجه دوم

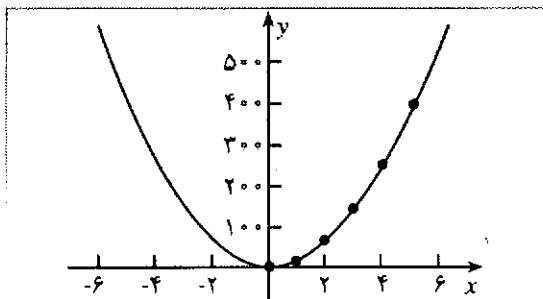
تعریف: تابع درجه دوم به صورت کلی:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

است که در آن: $a \neq 0$. بنابراین این تابع شامل یک جمله درجه دوم، یک جمله درجه اول و یک جمله ثابت است.

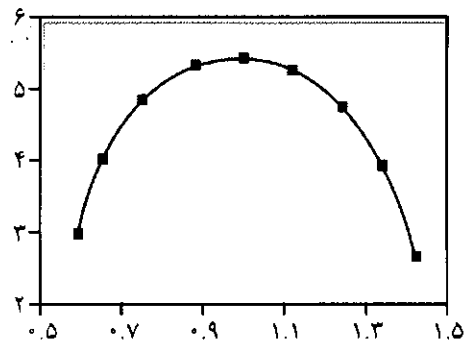
نمودار تابع درجه دوم، سهمی است. در مثال زیر یک سهمی را در حالت خاص داریم.

مثال ۱. شکل ۲، نمودار تابع درجه دوم با ضابطه $y = 16x^2$ (که در آن، با توجه به رابطه ۱ داریم: $a = 16$ و $b = c = 0$) را نشان می‌دهد. با فرض این که d در صفحه مختصات همان x و y باشند، نیمه راست این سهمی متناظر با نمودار تابع مسافت پائین آمدن قطعه سنگ (جدول ۱) است. نقاطی به مختصات (x, y) که روی نمودار این تابع مشخص شده‌اند، متناظر با زوج مرتب (t, d) طبق جدول ۱ هستند.



شکل ۲. نمودار یک سهمی به معادله $y = 16x^2$ است که نقاط $(0, 0)$ و $(1, 16)$ و $(2, 64)$ و $(3, 144)$ و $(4, 256)$ و $(5, 400)$ روی آن مشخص شده است.

نمودار تابع با ضابطه $y = -16x^2$ ، تقریباً شبیه نمودار شکل ۲ است؛ با این تفاوت که دهانه سهمی رو به بالا باز نمی‌شود، بلکه دهانه آن رو به پائین باز می‌شود. به طور کلی، نمودار تابع به معادله: $y = ax^2$ (۲) که در آن $a \neq 0$ ، یک سهمی است که رأس آن (نقطه‌ای که جهت سهمی در آن



شکل ۱. حرکت سنج ارتفاع توپ را در هر ۰/۱ ثانیه اندازه‌گیری می‌کند.

که منحنی به صورت یک سهمی^۲ است که نمودارش شبیه به وارونه نمودار تابع درجه دوم $f(x) = x^2$ است. درواقع وضعیت توپ در حالت بالا رفتن یا پائین آمدن، با یک مدل ریاضی تابع درجه دوم مشخص می‌شود.

در این مقاله، ابتدا توابع درجه دوم و تابع‌های توانی را بررسی می‌کنیم. سپس رابطه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که برای هر کدام از آن‌ها، مدل‌های مناسبی را ارائه خواهیم کرد.

ابتدا به طور خلاصه بعضی از توابع غیرخطی ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که اطلاعاتی از دنیای پیرامون به ما می‌دهند. ضمناً توابع را به صورت مصور و با نمودار مطالعه می‌کنیم. درحقیقت هدف این است که شما دانش‌آموزان به تفاوت‌های اساسی که بین نمونه‌های مختلف توابع وجود دارند، پی ببرید.

توابع درجه دوم و سهمی‌ها

فرض کنید که یک قطعه سنگ از بالای برجی به پائین افتاده باشد، جدول ۱، فاصله^۳ d (بر حسب فوت) قطعه سنگ را پس از پائین آمدن و بعد از t ثانیه نشان می‌دهد.

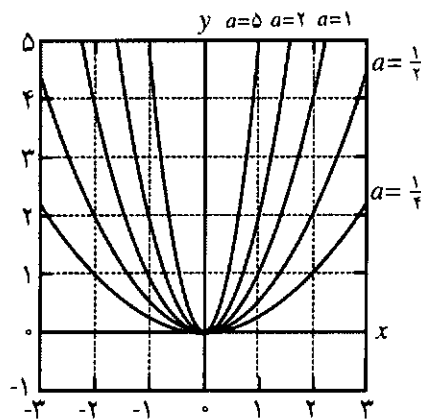
t (ثانیه)	d (فوت)
۰	۰
۱	۱۶
۲	۶۴
۳	۱۴۴
۴	۲۵۶
۵	۴۰۰

جدول ۱

توجه کنید که در ستون سمت

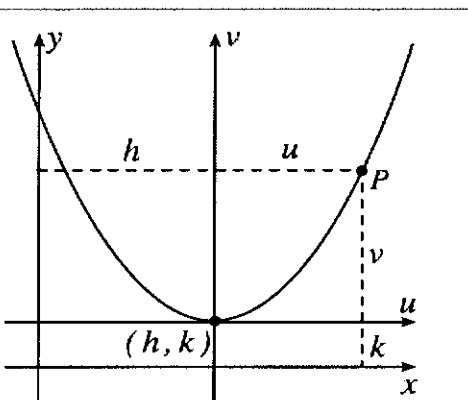
چپ جدول، تفاوت بین دو زمان متوالی برابر با ۱ ثانیه است. اما در ستون سمت راست، تفاوت بین هر دو عدد متوالی یکسان

عوض می شود) مبدأ مختصات، یعنی نقطه $(0,0)$ است. در معادله ۲، اگر $a > 0$ ، آن گاه دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، آن گاه دهانه سهمی رو به پایین است. در معادله ۲، اندازه ضریب a ، عرض سهمی را مشخص می کند. به بیان دقیق تر، برای $a > 0$ هر چه مقدار a افزایش پیدا کند، شیب منحنی تندتر و عرض سهمی کم تر می شود. شکل ۳ را ملاحظه کنید.



شکل ۳. سهمی ها با عرض های متفاوت

در شکل ۴، یک سهمی را ملاحظه می کنید که رأس آن به جای مبدأ مختصات، نقطه (h,k) است. معادله این سهمی در دستگاه مختصات uv به صورت $v = au^2$ و مانند معادله ۲ است؛ با این تفاوت که به جای x و y ، متغیرهای u و v آمده است. با توجه به شکل، واضح است که در دستگاه های



شکل ۴. سهمی انتقال داده شده

مختصات xy و uv داریم: $u = x - h$ و $v = y - k$. با جایگذاری این رابطه ها در معادله $v = au^2$ ، معادله انتقال یافته سهمی با رأس (h,k) را در دستگاه مختصات xy به دست می آوریم:

$$y - k = a(x - h)^2 \quad (3)$$

اگر معادله ۳ را ساده کنیم و آن را بر حسب x مرتب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که معادله، شامل یک جمله درجه دوم، یک جمله درجه اول و یک مقدار ثابت است. در حالت کلی، نمودار تابع با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ ، یک سهمی انتقال یافته است. در صورتی که این معادله را بر حسب x مربع کامل کنیم، آن گاه معادله ای مانند معادله ۳ به دست می آوریم. مثال ۲. نمودار تابع با ضابطه $y = 2x^2 - 4x - 1$ را رسم کنید.

حل: ابتدا این معادله را بر حسب x مربع کامل می کنیم:

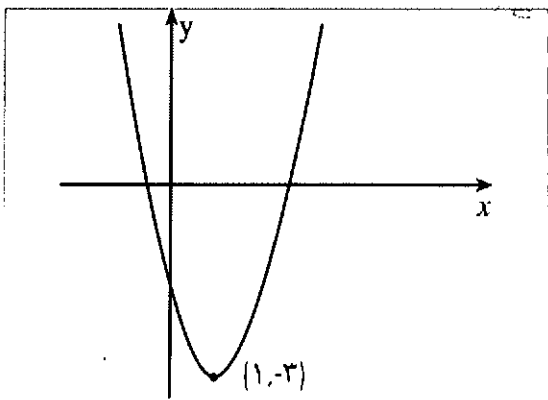
$$y = 2(x^2 - 2x) - 1$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 1 = 2(x - 1)^2 - 3$$

در نتیجه داریم:

$$y + 3 = 2(x - 1)^2$$

با مقایسه معادله اخیر و معادله ۳ ملاحظه می کنیم که با $a = 2$ ، $h = 1$ و $k = -3$. در نتیجه شکل ۵ نمودار سهمی را نشان می دهد که دهانه آن رو به بالا و رأس آن نقطه $(1, -3)$ است.



شکل ۵

تابع های توانی

تابع خطی (درجه اول) با ضابطه $f(x) = x$ و تابع درجه دوم با ضابطه $g(x) = x^2$ هر دو مثال هایی از تابع های توانی هستند.

تابع توانی^۵

تعریف: ضابطه تابع توانی در حالت کلی به صورت

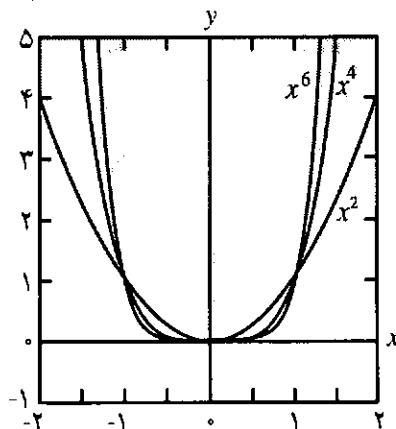
$$f(x) = x^k \quad (۴)$$

که در آن، k عدد ثابتی است و می تواند مثبت یا منفی و صحیح یا گویا (حتی گنگ مانند $\sqrt{2}$ یا π) باشد.

مثال ۳. در تابع توانی ۴، اگر $k=1$ ، آن گاه نمودار آن خطی با معادله $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) است. درحالتی که $k=2$ ، نمودار آن سهمی با ضابطه $y = x^2$ است. اگر $k=0$ ، آن گاه (چون $x^0 = 1$) تابع ثابت $f(x) = 1$ به دست می آید و نمودار آن خط افقی با معادله $y = 1$ است. اگر $k=3$ در این صورت، تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ را داریم که نمودار آن در شکل ۶ نشان داده شده است.

مطلب بسیار مهمی که باید به آن دقت کرد این است که نمودارهای سهمی با معادله $y = x^2$ و تابع درجه سوم با معادله $y = x^3$ ، معیارهای خوبی برای رسم تابع توانی $f(x) = x^k$ با هر توان صحیح و مثبت k هستند. نمودارهای تابع های توانی با درجه های زوج^۶، یعنی x^2 ، x^4 و x^6

به همین ترتیب از این به بعد، به صورت سهمی (کاسه با دهانه رو به بالا) هستند که نمودارهای آن ها را در شکل ۷ ملاحظه می کنید (این نمودارها با نقطه یابی رسم شده اند).

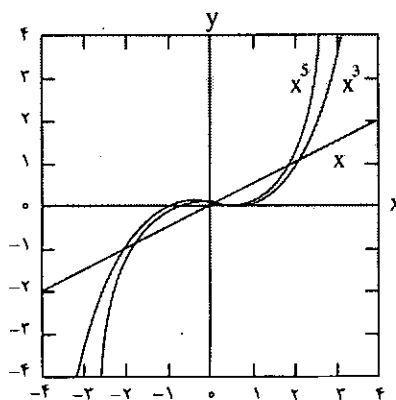


شکل ۷. نمودارهای تابع های توانی با درجه های زوج

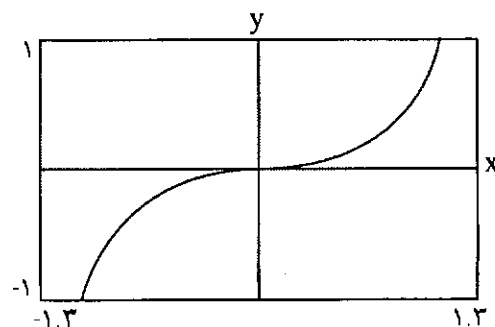
با دقت در شکل ۷ ملاحظه می کنیم که هرچه توان های زوج بزرگ تر می شوند، نمودارهای تابع ها به سمت مبدأ نزدیک تر می شوند (دهانه سهمی ها بسته تر می شوند و به طرف محور یها نزدیک تر می شوند).

نمودارهای تابع های توانی با درجه های فرد^۸، یعنی x ، x^3 و x^5 به همین ترتیب از این به بعد، شبیه نمودار تابع درجه سوم هستند؛ نمودار همگی آن ها از جنوب غربی (ناحیه سوم) تا شمال شرقی (ناحیه اول) هستند که نمودارهای آن ها را در شکل ۸ ملاحظه می کنید (این نمودارها با نقطه یابی رسم شده اند).

با دقت در شکل ۸ ملاحظه می کنید که هرچه توان های



شکل ۸. نمودارهای تابع های توانی با درجه های فرد

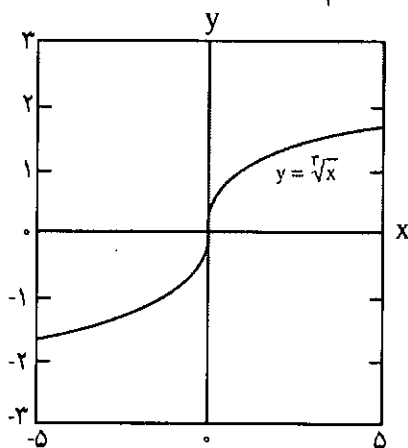


شکل ۶. نمودار تابع با ضابطه $y = x^3$ که با x و y نقطه یابی طبق جدول روبرو، رسم شده است: x و y

مثال ۵. هرگاه در رابطه ۵، $p=1$ و $q=3$ قرار دهیم، تابع ریشه سوم^{۱۰} به دست می آید:

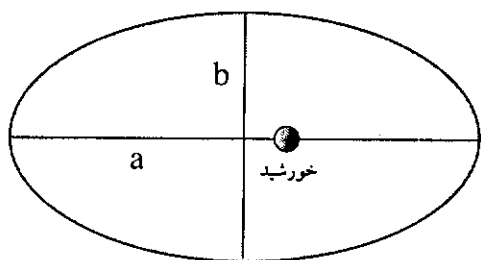
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

نمودار تابع ریشه سوم در شکل ۱۰ نشان داده شده است. عددهای حقیقی مثبت، ریشه سوم مثبت دارند؛ مانند: $\sqrt[3]{8} = 2$. همچنین عددهای حقیقی منفی، ریشه سوم منفی دارند؛ مانند: $\sqrt[3]{-1} = -1$ ، زیرا $(-1)^3 = -1$. به همین دلیل است که نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در کل صفحه مختصات (نیمه راست و نیمه چپ صفحه مختصات) رسم شده است.



شکل ۱۰. نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{1}{3}}$

مثال ۶. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید مانند یک بیضی^{۱۱} است که در شکل ۱۱ نشان داده شده است (همان طور که در شکل نشان داده شده است، خورشید خارج از مرکز این بیضی قرار دارد).



شکل ۱۱. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید تقریباً شبیه به بیضی است.

فرد بزرگ تر می شوند، نمودار تابع ها به سمت مبدأ نزدیک تر می شوند (شاخه های منحنی به طرف محور عرض ها نزدیک تر می شوند).

اگر در تابع $f(x) = x^k$ ، k عدد صحیح نباشد، آن گاه حالت جدیدی از این تابع به دست می آید. هرگاه $k = \frac{p}{q}$ که p و $q \neq 0$ عددهای صحیح هستند، در این صورت توان کسری x^k به صورت زیر تعریف می شود:

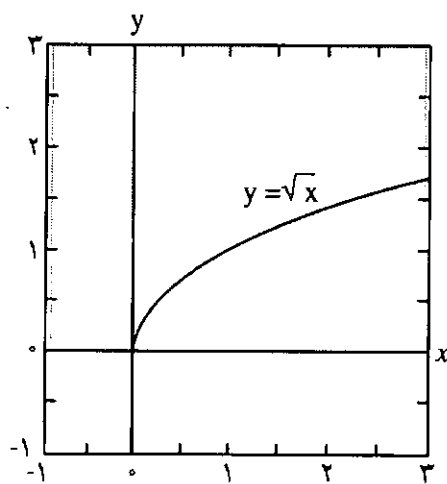
$$x^k = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} \quad (5)$$

یکی از راه هایی که به کمک آن بتوانیم نقش p و q را به خاطر بسپاریم (یعنی کدام توان و کدام ریشه هستند)، این است که بگوییم «صورت کسر یعنی p توان است» بنابراین q باید ریشه باشد.

مثال ۴. هرگاه در رابطه ۵، $p=1$ و $q=2$ قرار دهیم، تابع ریشه دوم^۹ به دست می آید:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

نمودار تابع ریشه دوم در شکل ۹ نشان داده شده است. چون عددهای حقیقی منفی، ریشه دوم ندارند، بنابراین تابع ریشه دوم فقط برای $x \geq 0$ تعریف می شود. به همین دلیل است که شکل ۹ نمودار تابع را فقط در نیمه راست صفحه مختصات نشان می دهد.



شکل ۹. نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{1}{2}}$

یک بیضی می تواند به صورت «دایره فشرده» با شعاع بزرگ $a^{(12)}$ و شعاع کوچک $b < a^{(13)}$ در نظر گرفته شود. در دایره، همه شعاع ها با هم برابرند و این تفاوتی است که دایره با بیضی دارد. در سال ۱۶۱۹، ریاضیدان و ستاره شناس آلمانی، جان کپلر^(۱۲) شعاع های بزرگ مدارهای شش سیاره را که تا آن زمان شناخته شده بودند، محاسبه کرد و همچنین دوره تناوب (T) از گردش هر کدام از آن سیاره ها را به دور خورشید، در قالب یک جدول معرفی کرد. جدول ۲ شعاع های بزرگ اندازه گیری شده را با واحدهای ستاره شناسی (AU) نشان می دهد (یک AU عبارت است از شعاع بزرگ مدار حرکت زمین به دور خورشید). دوره تناوب هر یک از سیاره ها در مقایسه با دوره تناوب زمین آورده شده است.

با توجه به جدول ۲ ملاحظه می کنیم که دوره تناوب گردش عطارد به دور خورشید کم تر از ۳ ماه است؛ زیرا دوره تناوب گردش زمین به دور خورشید یک سال است، بنابراین در هر ماه، زمین $\frac{1}{12} = 0.08\bar{3}$ سال روی مدار خود حرکت می کند. از طرف دیگر، دوره تناوب عطارد نسبت به زمین ۰/۲۴۱ سال است. بنابراین عطارد به مدت $3 < \frac{0.241}{0.08\bar{3}} = 2.9$ دور مدار خود به دور خورشید نسبت به زمین حرکت می کند تا یک دور کامل، مدار خود را طی کند. همچنین، دوره تناوب گردش مشتری به دور خورشید نزدیک ۱۲ سال

است؛ زیرا:

$$11/862 < 12$$

با در نظر گرفتن این که شعاع بزرگ، میانگین فاصله سیاره از خورشید است و با دقت در ستون دوم جدول ۲ ملاحظه می کنیم که زهره نسبت به زمین کم تر از $\frac{3}{4}$ (زیرا: $0.723 < \frac{3}{4}$) دور تر از خورشید قرار دارد، در حالی که مریخ نسبت به زمین کمی بیش از یک و نیم برابر (زیرا: $1/524 > 1/5$) دور تر از خورشید است. قانون سوم کپلر درباره حرکت سیاره ای می گوید که (با واحدهایی که در جدول به کار رفته است): مجذور دوره تناوب حرکت یک سیاره به دور خورشید (T^2) با مکعب شعاع بزرگ (a^3) مدار حرکت سیاره به دور خورشید برابر است. یعنی:

$$T^2 = a^3$$

بنابراین (با استفاده از ریشه سوم) ملاحظه می کنیم که شعاع بزرگ تابعی از دوره تناوب است؛ به طوری که:

$$a = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{T^2} = (T^2)^{\frac{1}{3}} = T^{\frac{2}{3}}$$

با استفاده از یک ماشین حساب، درستی رابطه $a = T^{\frac{2}{3}}$ را برای هر کدام از سیاره های جدول ۲ تحقیق کنید.

اسحاق نیوتن^(۱۵) نشان داد که رابطه $a = T^{\frac{2}{3}}$ برای همه سیاره ها و ستاره های دنباله دار برقرار است. فرض کنید ستاره ای کشف شده است که نسبت به زمین ۴ برابر دور تر از خورشید است. چه قدر

طول می کشد تا این ستاره گردش خود را به دور خورشید کامل کند؟

توجه: با دقت در جدول ۲، اگر شما در سیاره عطارد یا زحل زندگی می کردید،

سیاره	شعاع بزرگ a (بر حسب AU)	دوره تناوب T (بر حسب سال)
عطارد	۰/۳۸۷	۰/۲۴۱
زهره	۰/۷۲۳	۰/۶۱۵
زمین	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
مریخ	۱/۵۲۴	۱/۸۸۱
مشتری	۵/۲۰۱	۱۱/۸۶۲
زحل	۹/۵۳۸	۲۹/۴۵۶

حدس می زنید نسبت به زمین چند ساله بودید؟

تمرین ها

یک سهمی را به معادله $y = ax^2$ ، در نظر بگیرید.
مقدار a را چنان به دست آورید که سهمی از نقطه P با
مختصات داده شده زیر عبور کند:

۱. $P(3 \text{ و } 18)$

۲. $P(-2 \text{ و } 24)$

۳. $P(4 \text{ و } -64)$

۴. $P(-5 \text{ و } -250)$

تابع درجه دوم با ضابطه $f(x) = x^2 + bx + c$ را در
نظر بگیرید، مقدارهای b و c را چنان بیابید که نمودار
این تابع از نقطه های P و Q با مختصات داده شده زیر
عبور کند.

۵. $P(-1 \text{ و } 2)$ و $Q(1 \text{ و } 6)$

۶. $P(-3 \text{ و } -1)$ و $Q(3 \text{ و } 23)$

۷. $P(-4 \text{ و } 35)$ و $Q(4 \text{ و } 11)$

۸. $P(-5 \text{ و } 150)$ و $Q(5 \text{ و } 50)$

راهنمایی: اگر مختصات نقاط P و Q را در معادله
تابع قرار دهیم، در این صورت دو معادله با دو مجهول
به دست می آید که با حل یک دستگاه دو معادله
و دو مجهولی، مقدارهای b و c به دست می آیند.

در تمرین های ۹ تا ۱۴، تابع های درجه دوم با
نمودارهایشان داده شده است. مشخص کنید، هر نمودار
مربوط به کدام تابع است.
راهنمایی: از مقدار $f(0)$ و این که دهانه سهمی رو به
بالا یا رو به پایین می شود، استفاده کنید.

۹. $f(x) = x^2 + 1$

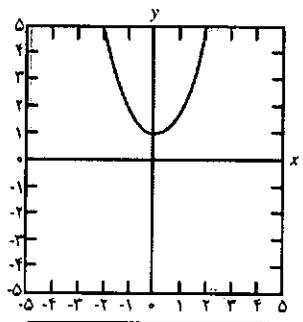
۱۰. $f(x) = 4 - x^2$

۱۱. $f(x) = -x^2 - 2x$

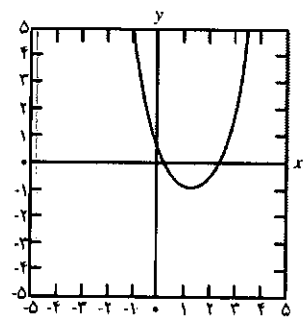
۱۲. $f(x) = x^2 - 2x$

۱۳. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

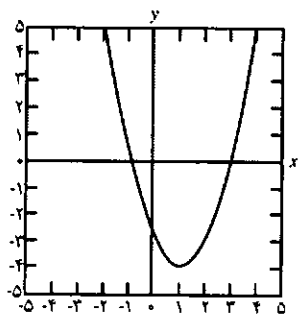
۱۴. $f(x) = 3 - 2x - x^2$



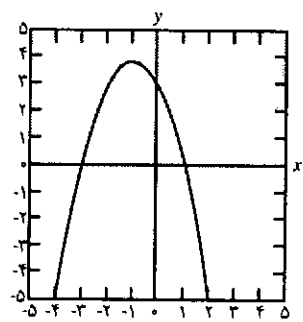
شکل ۱۴



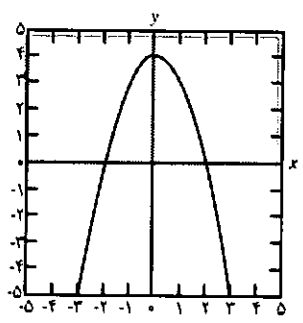
شکل ۱۱



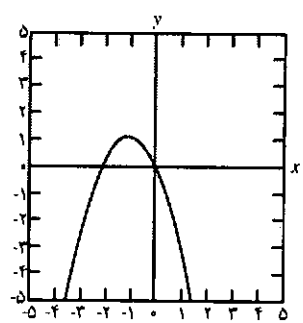
شکل ۱۵



شکل ۱۲



شکل ۱۶



شکل ۱۳

زیر نویس

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. motion detector | 2. parabolic |
| 3. quadratic function | 4. vertex |
| 5. power function | 6. cubic function |
| 7. even- degree | 8. odd-degree |
| 9. square root function | 10. cube root function |
| 11. ellipse | 12. major radius |
| 13. minor radius | 14. johann kepler |
| 15. Isaac Newton | |

منبع

Elementary Mathematics modeling/ Mary Ellen
Davis (university of Georgia)
C. Henry Edwards (university of Georgia)
2001 by prentice- Hall (U.S.A)