



قسمت اول

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

● احمد قلندهاری

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته تجربی



دانش آموزان دوره متوسطه

تابع لگاریتمی

تابع به معادله $f(x) = a^x$ تابعی است از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^+$ که یک به یک هم هست؛ پس وارون پذیر است. وارون آن را تابع لگاریتم می نامیم و آن را به صورت: $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می دهیم که در آن: $a > 0$ و $a \neq 1$ است.



نمودار تابع لگاریتم

نمودار تابع $y = \log_a x$ ، قرینه نمودار تابع به معادله $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ است.

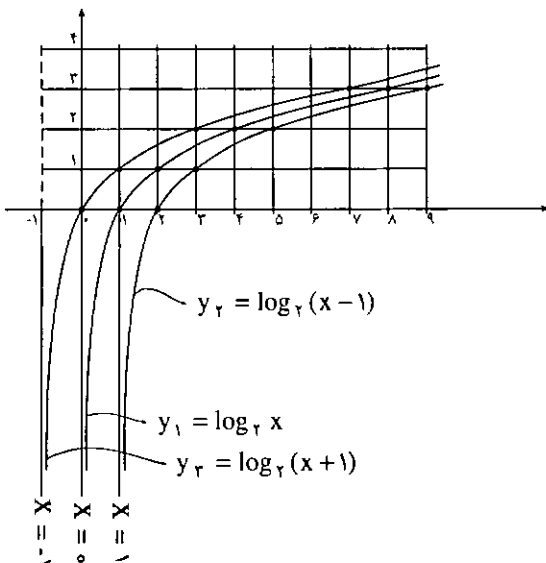
در ریاضی، تابع هایی وجود دارند که فرایند معمولی محاسبات جبری را بالا می برند. به عبارت دیگر، برای محاسبات ریاضی پهنه وسیع تری را در اختیار ما می گذارند. برای مثال، محاسبه عدد 2^{1000} که عددی ۳۰۲ رقمی است، بدون استفاده از لگاریتم، کاری طاقت فرسا و فوق العاده وقت گیر است؛ در صورتی که به کمک لگاریتم به سادگی قابل محاسبه است. به همین علت این تابع ها در ماشین حساب ها و رایانه ها به صورت برنامه ریزی شده وجود دارند.

این گونه تابع ها به تابع های نمایی و معکوس آن ها به تابع های لگاریتمی معروفند که در این مقاله به بررسی آن ها می پردازیم.

x	0^+	1	2	4	8	$+\infty$
$\log_2 x$	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$

x	1^+	2	3	5	9	$+\infty$
$\log_2(x-1)$	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$

x	-1^+	0	1	3	7	$+\infty$
$\log_2(x+1)$	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$



مجانبات های قائم سه نمودار

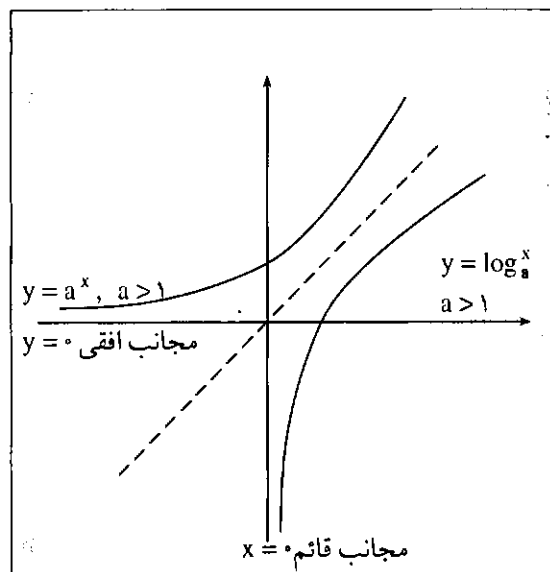
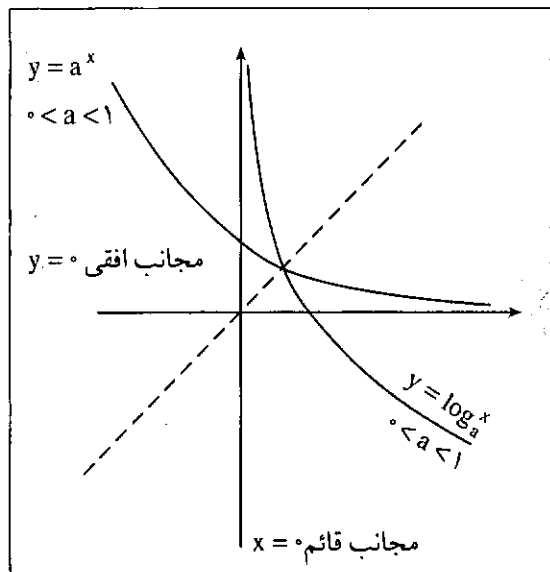
مثال ۲: نمودار تابع های به معادله های $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $y_2 = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ را در صفحه مختصات رسم کنید.

حل: مانند مثال قبل نمودارها را با نقطه یابی رسم می کنیم:

x	0^+	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	$-\infty$	1	0	-1	-2	-3	$-\infty$

x	-1^+	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7	$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$	$-\infty$	1	0	-1	-2	-3	$-\infty$

x	1^+	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9	$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$	$-\infty$	1	0	-1	-2	-3	$-\infty$



مثال ۱: تابع های به معادله های $y_1 = \log_2 x$ و $y_2 = \log_2(x-1)$ را در یک شکل رسم کنید.

توجه: می توان تابع به معادله $y_1 = \log_2 x$ را رسم کرد، پس برای رسم تابع y_2 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت راست و برای رسم تابع y_3 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت چپ انتقال داد. ولی بهتر است هریک از سه تابع را به کمک جدول رسم کرد.

$$\Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

مثال ۵: دامنه تعریف تابع به معادله

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3)} \text{ را بیابید.}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3) \geq 0 \xrightarrow{\text{میناکوچک تر از (۱) است}} 0 < x^2 - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow$$

$$0 < x^2 - 3 \leq 1$$

$$\Rightarrow 3 < x^2 \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < x \leq 2 \\ -2 \leq x < -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2]$$

مثال ۶: ثابت کنید تابع به معادله

$$f(x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x) \text{ تابعی فرد است.}$$

حل:

$$f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x) + \log(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x)(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(1 + 4x^2 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

f تابعی فرد است.

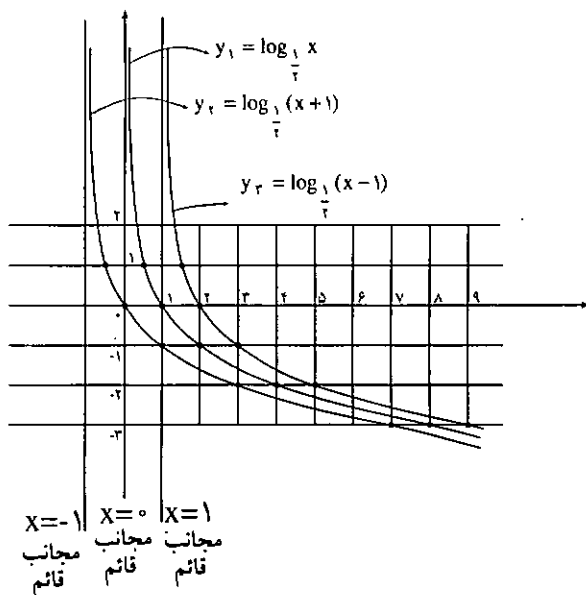
مثال ۷: نمودار تابع های به معادله های $f_1(x) = e^x$ و

$$f_2(x) = e^{x+1} \text{ و } f_3(x) = e^{x-1} \text{ را در یک نمودار رسم کنید.}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
e^{x+1}	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
e^{x-1}	0^+	1	e	$+\infty$



لگاریتم طبیعی

$$\begin{cases} \text{Lin}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \\ n \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ داشتیم:}$$

اگر مبنای لگاریتم عدد e باشد، این لگاریتم را لگاریتم طبیعی گویند و آن را با نماد $\log_e$ یا Ln نشان می دهند.

$$x = e^y \Leftrightarrow \text{Ln} x = y \text{ یا } y = \text{Ln} x$$

توجه: تمام فرمول های $\log_a x$ ، $a > 0$ و $a \neq 1$ در مورد x یا $\text{Ln} x$ نیز صادق است.

مثال ۳: اگر $\text{Ln} 2 = 0.693$ باشد، آن گاه $\text{Ln} 4^{2\sqrt{2}}$ را

بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} \text{Ln} 4^{2\sqrt{2}} &= \text{Ln}(2^2)^{2\sqrt{2}} = \text{Ln}(2)^{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{Ln} 2 = \\ &= 4\sqrt{2}(0.693) = 3.908 \end{aligned}$$

مثال ۴: دامنه تعریف تابع به معادله

$$f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 3)} \text{ را بیابید.}$$

حل:

$$\log_2(x^2 - 3) \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 3) \geq 2^0 \Rightarrow x^2 - 3 \geq 1$$

مثال ۹: نامعادله $\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 5) \geq -\frac{2}{3}$ را حل کنید.

حل:

$$\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 5) \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_{2^{-3}}(x^2 - 5) \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{3} \log_2(x^2 - 5) \geq -\frac{2}{3}$$

طرفین نامساوی را در (-3) ضرب می‌کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \log_2(x^2 - 5) \leq 2 \Rightarrow 0 < x^2 - 5 \leq 2^2 \Rightarrow 0 < x^2 - 5 \leq 4$$

$$\Rightarrow 5 < x^2 \leq 9 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5} < x \leq 3 \\ -3 \leq x < -\sqrt{5} \end{cases}$$

مثال ۱۰: برد تابع به معادله $f(x) = \log(3\sin x - 2)$ را بیابید.

حل: $3\sin x - 2$ را مساوی P می‌گیریم. پس

$$P = 3\sin x - 2$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow P = 1$$

$$\sin x = \frac{2}{3} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < P < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < 3\sin x - 2 < 1$$

$$\Rightarrow \log \frac{2}{3} \rightarrow -\infty, \log 1 = 0$$

چون تابع $f(x) = \log x$ اکیداً صعودی است، پس برد تابع: $[-\infty, 0]$ است.

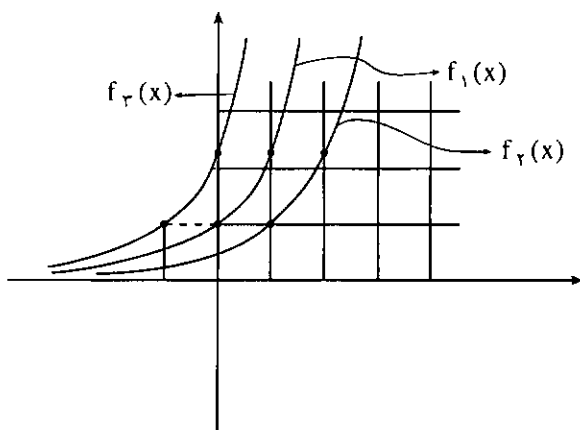
مشتق تابع لگاریتمی

$$y = \log_a x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$y = \log_a u \Rightarrow y'_x = \frac{u'}{u} \log_a e$$

مثال ۱۱: مشتق تابع به معادله $y = f(x) = \log \sqrt[3]{x^2}$ را نسبت به x بیابید.

$$u = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow u'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



مثال ۸: نمودار تابع‌های به معادله‌های

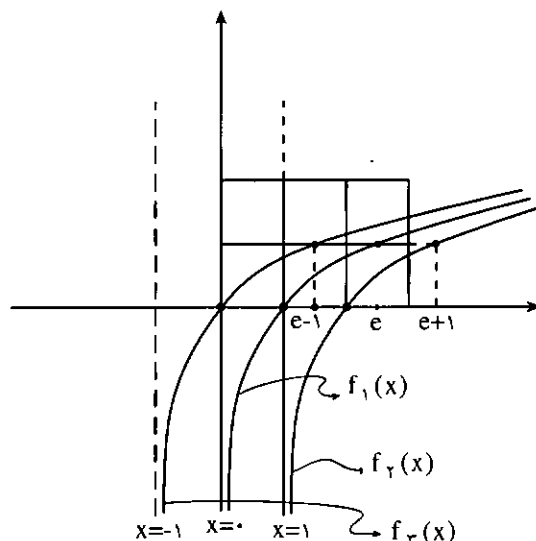
$$f_1(x) = \ln(x), f_2(x) = \ln(x-1), f_3(x) = \ln(x+1)$$

را در یک شکل رسم کنید.

x	0^+	1	e	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	1^+	2	$e+1$	$+\infty$
$\ln(x-1)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	-1^+	0	$e-1$	$+\infty$
$\ln(x+1)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



$$y = L_n(x) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x}$$

$$y = L_n(u) \Rightarrow y'_x = \frac{u'_x}{u}$$

مثال ۱۳: اگر $y = L_n(\tan x + \cot x)$ باشد، y'_x را

بیابید.

$$u = \tan x + \cot x$$

$$\Rightarrow u'_x = 1 + \tan^2 x - 1 - \cot^2 x$$

$$= \tan^2 x - \cot^2 x$$

$$y'_x = \frac{u'_x}{u} \Rightarrow y'_x = \frac{\tan^2 x - \cot^2 x}{\tan x + \cot x}$$

$$y'_x = f'(x) = \frac{u'}{u} \log e$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} \log e = \frac{2}{3x} \log e$$

مثال ۱۲: مشتق تابع به معادله $y = \log(\sin x + \tan x)$

را نسبت به x بیابید.

$$u = \sin x + \tan x \Rightarrow u'_x = \cos x + (1 + \tan^2 x)$$

$$y = \log u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log e$$

$$y'_x = \frac{u'_x}{u} \log e = \frac{\cos x + 1 + \tan^2 x}{\sin x + \tan x} \log e$$