

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

برای دانش آموزان
دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

در شماره قبل، مطالبی راجع به تابع نمایی و لگاریتمی بیان کردیم. در این مقاله، مشتق تابع نمایی را با مثال های متعدد و متنوعی می آوریم، سپس جدول تغییرات و نمودار تابع های لگاریتمی را رسم می کنیم.

مشتق تابع نمایی

$$۱. \quad y = e^x \Rightarrow y'_x = e^x$$

$$۲. \quad y = e^u \Rightarrow y'_x = u' e^u$$

$$۳. \quad y = a^x \Rightarrow y'_x = a^x \ln(a)$$

$$۴. \quad y = a^u \Rightarrow y'_x = u' a^u \ln(a)$$

مثال. y'_x را در توابع به معادله های زیر بیابید.

$$۱. \quad y = e^{\sin 2x} \quad u = \sin 2x \Rightarrow u'_x = 2 \cos 2x$$

$$y = e^u \Rightarrow y'_x = u' e^u = 2 \cos 2x e^{\sin 2x}$$

$$۲. \quad y = a^{\tan x} \quad u = \tan x \Rightarrow u'_x = (1 + \tan^2 x)$$

$$y = a^u \Rightarrow y'_x = u' a^u \ln(a) = (1 + \tan^2 x) a^{\tan x} \ln(a)$$

۳. $y = x^x$: لگاریتم طبیعی می گیریم از طرفین تساوی،

راه دیگر، استفاده از فرمول $y = e^u$ است که $y' = u' e^u$

$$\Rightarrow y = e^{x^r} \Rightarrow y'_x = r x e^{x^r}$$

$$۸. y = x^{\text{Ln} x} \Rightarrow \text{Ln} y = \text{Ln} x^{\text{Ln} x} = (\text{Ln} x)^r$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = r \left(\frac{1}{x} \right) \text{Ln} x \Rightarrow y'_x = y \left(\frac{r}{x} \text{Ln} x \right)$$

$$\Rightarrow y'_x = x^{\text{Ln} x} \left(\frac{r}{x} \text{Ln} x \right)$$

$$۹. y = \text{Sin} x^{\log x} \Rightarrow \text{Ln} y = \log x \text{Ln} \text{Sin} x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \frac{1}{x} \log e (\text{Ln} \text{Sin} x) + \frac{\text{Cos} x}{\text{Sin} x} \log x$$

$$y'_x = y \left(\frac{1}{x} \log e \cdot \text{Ln} (\text{Sin} x) + \cot x \log x \right)$$

$$y'_x = \text{Sin} x^{\log x} \left(\frac{1}{x} \log e \text{Ln} \text{Sin} x + \cot x \log x \right)$$

$$۱۰. y = e^x \text{Sin} x + r^x \text{Cos} x$$

$$y'_x = e^x \text{Sin} x + \text{Cos} x e^x + r^x \text{Ln} r (\text{Cos} x) - \text{Sin} x (r^x)$$

$$y'_x = e^x (\text{Sin} x + \text{Cos} x) + r^x (\text{Cos} x \text{Ln} r - \text{Sin} x)$$

$$۱۱. y = e^x \cdot a^x \text{Ln} x$$

$$y'_x = e^x (a^x \text{Ln} x) + a^x \text{Ln} a (e^x \cdot \text{Ln} x) + \frac{1}{x} (e^x \cdot a^x)$$

$$۱۲. y = \text{Sin} x^{(e^x)} \Rightarrow \text{Ln} y = e^x \text{Ln} \text{Sin} x$$

$$\frac{y'_x}{y} = e^x \text{Ln} \text{Sin} x + \frac{\text{Cos} x}{\text{Sin} x} \cdot e^x = e^x (\text{Ln} \text{Sin} x + \cot x)$$

$$y'_x = y e^x (\text{Ln} \text{Sin} x + \cot x)$$

$$y'_x = \text{Sin} x^{(e^x)} \cdot e^x (\text{Ln} \text{Sin} x + \cot x)$$

$$\text{Ln}(y) = \text{Ln}(x)^x \Rightarrow \text{Ln}(y) = x \text{Ln}(x)$$

از طرفین تساوی، نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\frac{y'_x}{y} = 1 \times \text{Ln}(x) + \frac{1}{x} \times x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = 1 + \text{Ln}(x) \Rightarrow y'_x = y(1 + \text{Ln}(x))$$

$$\Rightarrow y'_x = x^x (1 + \text{Ln}(x))$$

$$۴. y = x^{\text{Sin} x} \Rightarrow \text{Ln} y = \text{Ln}(x)^{\text{Sin} x}$$

$$\Rightarrow \text{Ln} y = \text{Sin} x \text{Ln}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \text{Cos} x \text{Ln}(x) + \frac{1}{x} \text{Sin} x$$

$$\Rightarrow y'_x = y \left(\text{Cos} x \text{Ln}(x) + \frac{1}{x} \text{Sin} x \right)$$

$$\Rightarrow y'_x = x^{\text{Sin} x} \left(\text{Cos} x \text{Ln}(x) + \frac{1}{x} \text{Sin} x \right)$$

$$۵. y = \text{Sin} x^{\tan x} \Rightarrow \text{Ln} y = \text{Ln}(\text{Sin} x)^{\tan x}$$

$$\Rightarrow \text{Ln} y = \tan x \text{Ln}(\text{Sin} x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = (1 + \tan^2 x) (\text{Ln} \text{Sin} x) + \frac{\text{Cos} x}{\text{Sin} x} \cdot \tan x, \quad x \neq \frac{k\pi}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \frac{\text{Ln} \text{Sin} x}{\text{Cos}^2 x} + 1 \Rightarrow y'_x = y \left(\frac{\text{Ln} \text{Sin} x}{\text{Cos}^2 x} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow y'_x = \text{Sin} x^{\tan x} \left(\frac{\text{Ln} \text{Sin} x}{\text{Cos}^2 x} + 1 \right)$$

$$۶. y = (\text{Sin} x)^x \Rightarrow \text{Ln} y = \text{Ln}(\text{Sin} x)^x$$

$$\Rightarrow \text{Ln} y = x \text{Ln}(\text{Sin} x) \Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \text{Ln} \text{Sin} x + \frac{\text{Cos} x}{\text{Sin} x} \cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \text{Ln} \text{Sin} x + x \cot x \Rightarrow y'_x = y(\text{Ln} \text{Sin} x + x \cot x)$$

$$\Rightarrow y'_x = \text{Sin} x^x (\text{Ln} \text{Sin} x + x \cot x)$$

$$۷. y = e^{x^r} \Rightarrow \text{Ln} y = \text{Ln} e^{x^r} \Rightarrow \text{Ln} y = x^r \text{Ln} e$$

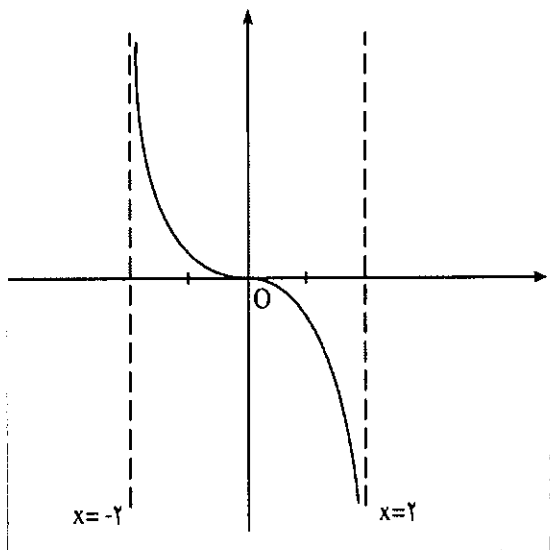
$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = r x \text{Ln} e \Rightarrow y'_x = y(r x \text{Ln} e) \Rightarrow y'_x = e^{x^r} (r x)$$

مسئله:

جدول تغییرات و نمودار توابع به معادله های زیر را رسم

کنید.

$$۱. y = \log \frac{1+x}{1-x} \quad \frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow D_f = (-1, 1)$$



$$y = \ln \frac{x-1}{x+1} \quad \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x = 1, -1 \Rightarrow$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

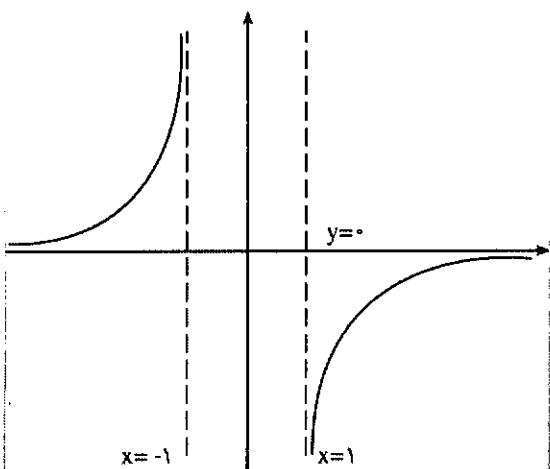
$$y' = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{x^2-1} > 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$		$+$
y	0	$+\infty$	$-\infty$	0

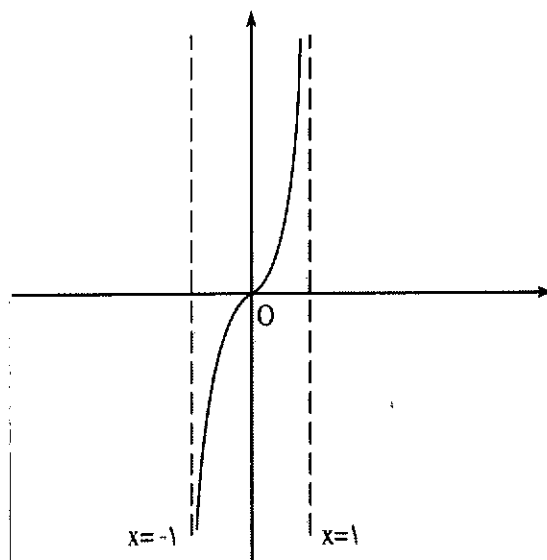


$$y'_x = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}} \log e = \frac{1}{1-x^2} \log e > 0$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

x	-1	0	1
y'		$+$	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$



$$y = \ln \frac{y-x}{y+x} \quad \frac{y-x}{y+x} > 0 \Rightarrow x = y, -y \Rightarrow D_f = (-y, y)$$

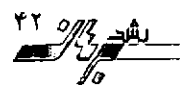
$$y' = \frac{\frac{-1}{(x+y)^2}}{\frac{y-x}{y+x}} = \frac{-1}{y-x^2} < 0$$

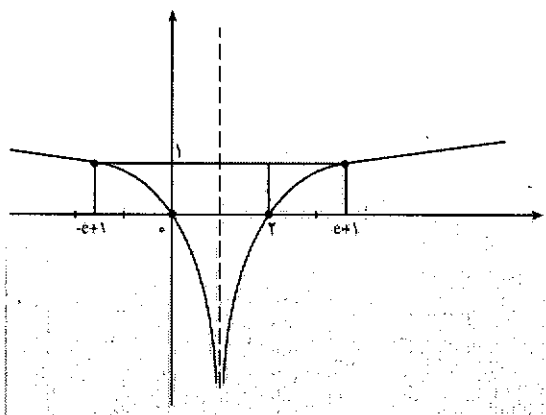
$$x \rightarrow -y^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow y^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

x	$-y$	0	y
y'			
y	$+\infty$	0	$-\infty$

برای دانش آموزان دوره متوسطه





$$\begin{cases} y = |u| \Rightarrow y'_x = \frac{v' \cdot v}{|v|} \\ y = |x-1| \Rightarrow y'_x = \frac{1(x-1)}{|x-1|} \end{cases}$$

$$y = \text{Ln}|x-1| \Rightarrow y' = \frac{\frac{x-1}{|x-1|}}{|x-1|} = \frac{x-1}{(x-1)^2}$$

اگر $\begin{cases} x > 1 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \text{تابع اکیدا صعودی است} \\ x < 1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow \text{تابع اکیدا نزولی است} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-e+1$	0	1^-	1^+	2	$e+1$	$+\infty$
$\text{Ln} x-1 $	$+\infty$	1	0	$-\infty$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

مسئله: مطلوب است رسم تابع های به معادله زیر:

$$1. y = x \text{Ln} x$$

دامنه تابع $(0, +\infty)$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim y = \lim x \text{Ln} x = 0 \times \infty = \lim \frac{\text{Ln} x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\text{دستور} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

هویتال

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$y' = 1 \cdot \text{Ln} x + \frac{1}{x} \cdot x = \text{Ln} x + 1 = 0$$

مسئله: نامعادله $\log_5 \frac{5}{1-x} > \log_5 \frac{1}{2+x}$ را حل کنید.

$$\Rightarrow \frac{5}{1-x} > \frac{1}{2+x} \Rightarrow \frac{5}{1-x} - \frac{1}{2+x} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{9+6x}{(1-x)(2+x)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 1, -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ریشه های صورت} \\ \text{و مخرج کسر} \end{array}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{9+6x}{(1-x)(2+x)}$		+	-	0	+
					-
		$x < -2$	$-\frac{3}{2} < x < 1$		

مسئله: نامعادله مقابل را حل کنید.

$$(0/2)^{-x^2+5x} < \frac{1}{625}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+5x} < \frac{1}{5^4} \Rightarrow 5^{x^2-5x} < 5^{-4} \Rightarrow x^2-5x < -4 \Rightarrow$$

$$x^2-5x+4 < 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

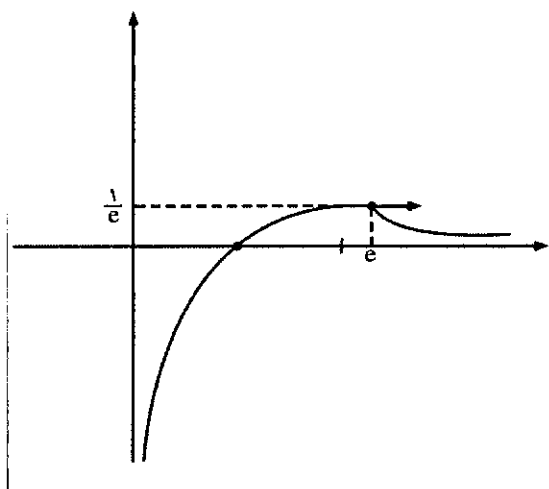
x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$x^2-5x+4 < 0$		+	0	-
				+

جواب $1 < x < 4$

مسئله: تابع به معادله $y = \text{Ln}|x-1|$ را رسم کنید.

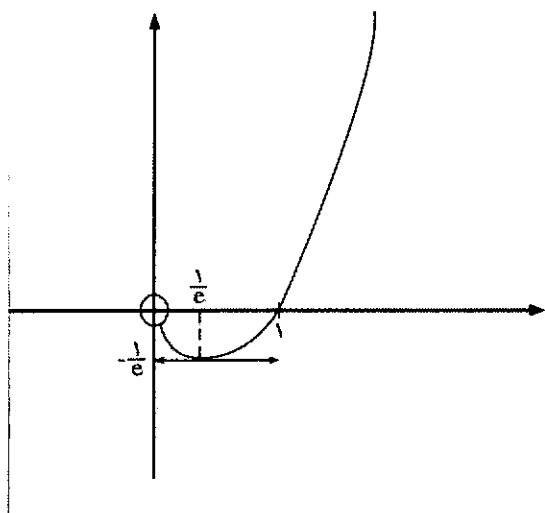
دامنه تعریف این تابع $\{1\} - \mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

$$y = \text{Ln}(u) \Rightarrow y'_x = \frac{u'_x}{u}$$



$$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	0^+	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	



۳. $y = x \ln x - x$ دامنه تابع $(0, +\infty)$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim y = 0 \times \infty = \lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

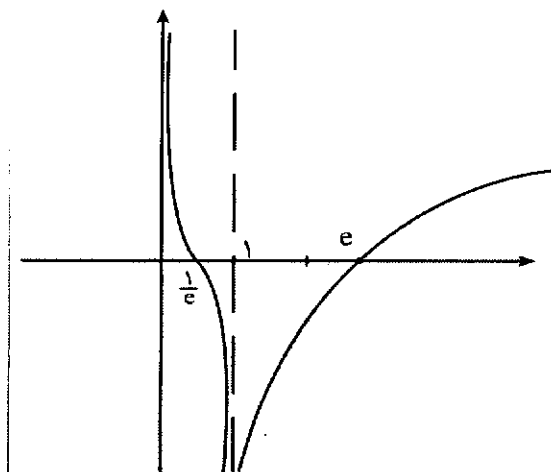
دستور: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

هریثال

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$y' = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x - 1 = \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0^+	1	e	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	0	$+\infty$



۴. $y = \frac{1}{x} \ln x$ دامنه تابع $(0, +\infty)$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

دستور هریتال $x' \rightarrow +\infty \Rightarrow y = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} = \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0^+	1	e	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \times \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

بنابراین تابع فرد است.

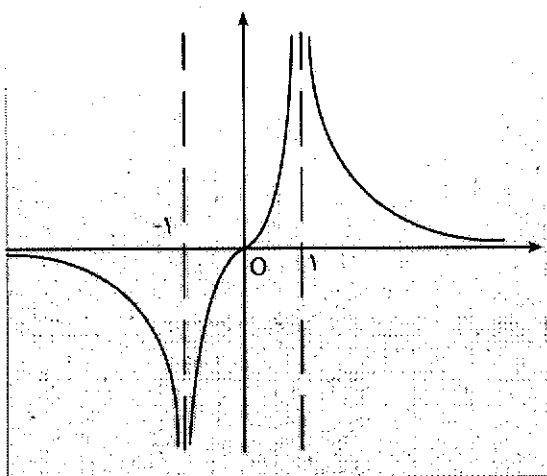
$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

تابع را در نصف دامنه آن، یعنی در بازه $(0, +\infty)$ و سپس قرینه شکل را نسبت به مبدا مختصات رسم می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2} \begin{cases} x > 1 \Rightarrow y' < 0 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow y' > 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln 1 = 0, \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
y'		+	-
y	0	$+\infty$	$+\infty$



$$۴. y = \ln |\ln x| \quad \text{دامنه تابع} = (0, +\infty)$$

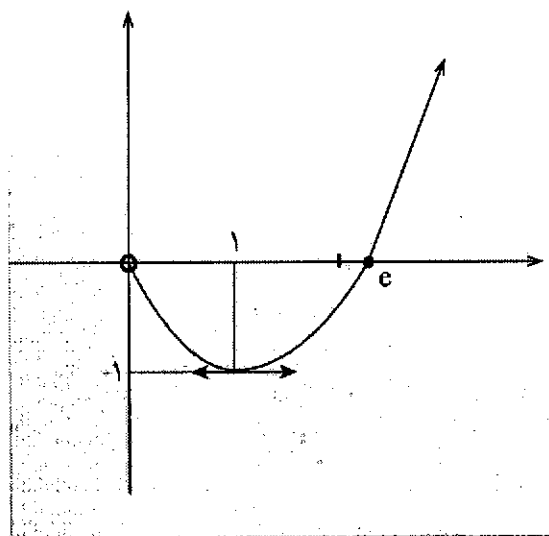
$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim y = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim y = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$y' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow \lim y = \ln |0^+| \rightarrow -\infty$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
y'		-	-	
y	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$



$$۵. y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

اولاً: ثابت می‌کنیم این تابع فرد است، زیرا

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right)$$