

تابع معکوس تابعهای مثلثاتی (Arcها) (قسمت اول)

● علی حسنزاده ماکویی

(مورد استفاده دانش آموزان دوم - سوم و چهارم)

باشد. پس از طی K دور دایره باید کمان $\frac{\pi}{6}$ را طی کند. همچنین می‌دانیم که نسبت‌های مثلثاتی همه کمانهای ω برابر با نسبت‌های کمان $\frac{\pi}{6}$ است. یعنی اندازه آنها هیچ رابطه‌ای با عدد K ندارد.

به این ترتیب در تعیین نسبت‌های مثلثاتی کمانهای $K\pi$ و $\omega = 2K\pi + \alpha$ می‌توان کمان α را در نظر گرفت. به کمان اولیه کمانهای ω موسوم است. واضح است که اگر φ از نظر اندازه مورد بررسی قرار گیرد مجموعه کمانهای ω متشکل از $(K+1)$ کمان است. به عکس وقتی صحبت از کمان مثلثاتی ω با کمان اولیه، $0 < |\alpha| < 2\pi$ می‌رود، باید کمانهای:

$$\omega = 2K\pi + \alpha, \quad (K \in \mathbb{Z})$$

را در نظر گرفت.

۲. کمان اصلی: با توجه به مطالب فوق کمانهای بی‌شماری است که در رابطه:

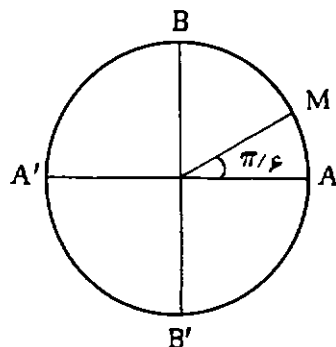
$$\sin(x) = m \quad \text{و} \quad |m| \leq 1$$

صدق می‌کند. بنابه قرارداد از بین کمانهای مزبور، کمانی مانند α با شرط: $\sin \alpha = m$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ به کمان اصلی، کمانهای x موسوم است.

۱. کمان مثلثاتی: هر يك از کمانهای

$$K \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 2K\pi + \frac{\pi}{6}$$

در ازای مقادیر مختلف (K) اندازه معینی دارند. برای مشخص کردن کمان ω در دایره مثلثاتی اگر نقطه A انتهای سمت راست



قطر افقی دایره را مبدأ اختیار کنیم، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که انتهای همه کمانهای مذکور نقطه M خواهد بود. موضع نقطه M با مسیر حرکت و مقادیر مختلف K هیچ رابطه‌ای ندارد. یعنی اگر متحرکی بخواهد از نقطه A شروع به حرکت کرده، پس از طی کمان ω به نقطه M برسد، مسیر حرکت او مثبت یا منفی (عکس حرکت عقربه‌های ساعت یا موافق آن)

با توجه به مطالب فوق به آسانی می توان نتیجه گرفت:

الف) کمانهای $\text{Arc } \sin(m)$ و $\text{Arc } \cos(t)$ و $\text{Arc } \csc(r)$ حاده هستند. و به ازای مقادیر مثبت اعداد m و t و r کمانها حاده مثبت، و به ازای مقادیر منفی اعداد مزبور، کمانها حاده منفی هستند.

ب) کمانهای $\text{Arc } \cos(n)$ و $\text{Arc } \cotg(q)$ و $\text{Arc } \sec(s)$ همواره مثبت هستند. به ازای مقادیر مثبت اعداد n و q و s کمانهای حاده مثبت، و به ازای مقادیر منفی اعداد مزبور کمانها منفرجه مثبت می باشند.

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\text{Arc } \sin\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \quad (1)$$

$$\text{arc } \sin\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = 2K\pi + \frac{\pi}{r} \quad \text{یا} \quad + \frac{2\pi}{r}$$

$$\text{Arc } \sin\left(-\frac{1}{r}\right) = -\frac{\pi}{r} \quad (2)$$

$$\text{arc } \sin\left(-\frac{1}{r}\right) = 2K\pi - \frac{\pi}{r} \quad \text{یا} \quad + \frac{2\pi}{r}$$

$$\text{Arc } \cos\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \quad (3)$$

$$\text{arc } \cos\left(\frac{1}{r}\right) = 2K\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

$$\text{Arc } \cos\left(-\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{2\pi}{r} \quad (4)$$

$$\text{arc } \cos\left(-\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = 2K\pi \pm \frac{2\pi}{r}$$

$$\text{Arc } \cos\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \quad (5)$$

$$\text{arc } \cos\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = K\pi + \frac{\pi}{r}$$

به همین ترتیب اگر β کمان اصلی، کمانهای y در رابطه، $|n| \leq 1$ و $\cos(y) = n$ و γ کمان اصلی، کمانهای z در رابطه، $t \in \mathbb{R}$ و $\text{tg}(z) = t$ و λ کمان اصلی، کمانهای u در رابطه، $q \in \mathbb{R}$ و $\cotg(u) = q$ و φ کمان اصلی، کمانهای v در رابطه، $|s| \geq 1$ و $\sec(v) = s$ (سکانت) و θ کمان اصلی، کمانهای w در رابطه، $|r| \geq 1$ و $\csc(w) = r$ (کسکانت) فرض شوند، بنا به قرارداد حدود کمانهای اصلی فوق الذکر به ترتیب عبارتند از:

$$s \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ و } 0 < \lambda < \pi \text{ و } -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r \leq -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0 \text{ و}$$

$$r \geq 1 \Rightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ و}$$

$$s \leq -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$$

در کتابهای درسی ایران کمانهای اصلی، α و β و γ و λ و φ و θ را به ترتیب:

$$\gamma = \text{Arctg}(t) \quad \text{و} \quad \beta = \text{Arc } \cos(n)$$

$$\alpha = \text{Arc } \sin(m) \quad \text{و} \quad \theta = \text{Arc } \csc(r)$$

$$\varphi = \text{Arc } \sec(s) \quad \text{و} \quad \lambda = \text{Arc } \cotg(q)$$

و همچنین کمانهای x و y و z و u و v و w را به ترتیب با نمادهای:

$$z = \text{arctg}(t) \quad \text{و} \quad y = \text{arccos}(n)$$

$$x = \text{arcsin}(m) \quad \text{و} \quad w = \text{arc } \csc(r)$$

$$v = \text{arc } \sec(s) \quad \text{و} \quad u = \text{arc } \cotg(q)$$

نشان داده شده اند. (Arc به معنی کمان است.)

$$x = \text{arc cotg}(\cos(\frac{\pi}{r})) \Rightarrow \quad (۱۴)$$

$$\text{Arctg}(-۱) = -\frac{\pi}{r} \quad (۶)$$

$$x = K\pi + \text{Arc cotg}(۰) = K\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\text{arctg}(-۱) = K\pi - \frac{\pi}{r}$$

$$\beta = \text{Arctg}(\sin(\frac{r\pi}{r})) \Rightarrow \quad (۱۵)$$

$$\text{Arccotg}(\frac{\sqrt{r}}{r}) = \frac{\pi}{r} \quad (۷)$$

$$\beta = \text{Arc tg}(-۱) = -\frac{\pi}{r}$$

$$\text{arc cotg}(\frac{\sqrt{r}}{r}) = K\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$y = \text{arctg}(\sin(۰)) \Rightarrow \quad (۱۶)$$

$$\text{Arccotg}(-۱) = \frac{r\pi}{r} \quad (۸)$$

$$y = K\pi + \text{Arctg}(۰) = K\pi$$

$$\text{arc cotg}(-۱) = K\pi - \frac{\pi}{r}$$

$$\gamma = \text{Arc sec}(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{r})}) \Rightarrow \quad (۱۷)$$

$$\text{Arc sec}(\sqrt{r}) = \frac{\pi}{r} \quad (۹)$$

$$\gamma = \text{Arc sec}(\frac{r\sqrt{r}}{r}) = \frac{\pi}{r}$$

$$\text{arc sec}(\sqrt{r}) = rK\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

$$z = \text{arcsec}(\sin(\frac{r\pi}{r})) \Rightarrow \quad (۱۸)$$

$$\text{Arcsec}(-\sqrt{r}) = \frac{r\pi}{r} \quad (۱۰)$$

$$z = rK\pi + \text{Arc sec}(-۱) \Rightarrow z = rK\pi + \pi$$

$$\text{arc sec}(-\sqrt{r}) = rK\pi \pm \frac{r\pi}{r}$$

$$A = \sin \text{Arccotg}(\sin(\frac{r\pi}{r})) \Rightarrow \quad (۱۹)$$

$$\text{Arc csc}(r) = \frac{\pi}{r} \quad (۱۱)$$

$$A = \sin \text{Arc cotg}(-۱) \Rightarrow$$

$$\text{arc csc}(r) = rK\pi + \frac{\pi}{r} \pm \frac{\Delta\pi}{r}$$

$$A = \sin(\frac{r\pi}{r}) = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$B = \cos \text{Arctg}(\cos(rK\pi)) \Rightarrow \quad (۲۰)$$

$$\text{Arc csc}(-\sqrt{r}) = -\frac{\pi}{r} \quad (۱۲)$$

$$B = \cos \text{Arc tg}(۱) \Rightarrow$$

$$\text{arc csc}(-\sqrt{r}) = rK\pi - \frac{\pi}{r} \pm \frac{\Delta\pi}{r}$$

$$B = \cos(\frac{\pi}{r}) = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\alpha = \text{Arc tg}(\cos(۰)) \Rightarrow \quad (۱۳)$$

$$\alpha = \text{Arc tg}(۱) = \frac{\pi}{r}$$

