



نباشد، پر بارترین ریاضیدان قرن هجدهم است و در اغلب زمینه‌های ریاضی سهمیم است. او درباره آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، حساب دیفرانسیل، نظریه گراف‌ها، نظریه معادلات، نظریه اعداد، هندسه مقدماتی و بخش‌های دیگر ریاضی تحقیق و تألیف می‌کرد.

در مقدماتی‌ترین مطالب نظریه اعداد با قضیه اوپلر و تابع  $\phi$  (تابع فی اوپلر) مواجه می‌شویم که به تفصیل به این قضیه خواهیم پرداخت.

شهرت اوپلر بیشتر به خاطر نمادهایی است که معرفی یا همگانی کرده است، که عبارتند از:

لئونارد اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳ م.) از پرکارترین ریاضیدانان مشهور است. می‌گویند که محاسبه‌ها را به سادگی نفس کشیدن انجام می‌داد. در حدود سال ۱۷۶۶، دچار مصیبت نابینایی کامل شد، ولی این مسأله کمترین خللی در کارهای او وارد نکرد و جالب این که به کمک حافظه شگفت‌انگیز و توانایی تمرکز حواس، حتی با وجود سروصدای زیاد به کار خلاق خود با دیکته کردن به یک منشی و با نوشتن فرمول‌ها روی تخته بزرگی که منشی‌اش از روی آن رونویسی کند، او ادامه داد و قسمت مهمی از آثار خود را پس از نابینایی انجام داده است. اوپلر اگر از پر بارترین ریاضیدانان همه اعصار

۱.  $\pi$  برای نمایش نسبت محیط دایره به قطر آن.

۲.  $f(x)$  به نشانه نماد تابع.

۳.  $e$  برای پایه لگاریتم طبیعی (عدد اویلر).

۴.  $a, b, c$  برای نمایش اضلاع مثلث  $ABC$ .

۵.  $r$  برای شعاع دایره محاطی داخلی مثلث  $ABC$ .

۶.  $R$  برای شعاع دایره محیطی مثلث  $ABC$ .

۷.  $\sum$  برای علامت مجموع یابی.

۸.  $i$  در اعداد مختلط که  $i^2 = -1$  یا  $i = \sqrt{-1}$ .

از میان حجم عظیم آثار اویلر، نتیجه‌ای معروف را مطرح می‌کنیم که به حق از به دست آوردن آن بسیار راضی بود:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

اکنون تابع حسابی اویلر را مطرح می‌کنیم. برای مثال عدد طبیعی  $10$  را در نظر بگیرید، چند تا عدد طبیعی کوچکتر از  $10$  وجود دارند که نسبت به  $10$  اول می‌باشند؟ به بیان دیگر تعداد عضوهای مجموعه زیر:

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < 10, (m, 10) = 1\}$$

چند تا است؟ با اندکی تأمل ملاحظه می‌کنیم که  $A = \{1, 3, 7, 9\}$ ، در نتیجه ۴ عدد طبیعی کوچکتر از  $10$  وجود دارند که نسبت به  $10$  اول می‌باشند، در این حالت می‌نویسیم  $\varphi(10) = 4$ .

تعریف. فرض می‌کنیم  $n > 1$  یک عدد طبیعی باشد، تعداد عددهای طبیعی که اولاً کوچکتر از  $n$  باشند، ثانیاً نسبت به  $n$  اول باشند، با نماد  $\varphi(n)$  نمایش داده می‌شود و به آن تابع حسابی اویلر می‌گوییم. بنابراین اگر داشته باشیم:

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < n, (m, n) = 1\}$$

$$\text{آنگاه } \varphi(n) = |A|$$

قضیه زیر که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول آن را ثابت می‌کنیم، به مبادگی برای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار  $\varphi(n)$  را مشخص می‌کند.

قضیه. فرض کنیم که  $n$  یک عدد طبیعی باشد و

$n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k}$  تجزیه  $n$  به حاصل ضرب عامل‌های اول باشد که در آن  $P_1, P_2, \dots, P_k$  عددهای اول و متمایز باشند و  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  عددهای طبیعی باشند، در این صورت داریم:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right)$$

اثبات. مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  را در نظر می‌گیریم، سپس برای هر  $1 \leq i \leq k$ ، مجموعه  $A_i$  را برابر با عضوهایی از مجموعه  $S$  در نظر می‌گیریم که عدد اول  $P_i$  آن عضوها را عاد می‌کنند، یعنی داریم:

$$A_i = \{1 \leq m \leq n : P_i \mid m\}$$

در واقع هدف یافتن  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$  است. برای این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای  $k$  مجموعه متاهی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| \quad (1)$$

برای هر  $1 \leq i \leq k$  چون  $n$  بر  $P_i$  بخش پذیر است، بنابراین داریم:

$$|A_i| = \left\lfloor \frac{n}{P_i} \right\rfloor = \frac{n}{P_i} \quad (1 \leq i \leq k)$$

همچنین داریم:

$$|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{n}{P_i P_j} \right\rfloor = \frac{n}{P_i P_j} \quad (1 \leq i < j \leq k)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_r| = \left\lfloor \frac{n}{P_i P_j P_r} \right\rfloor = \frac{n}{P_i P_j P_r} \quad (1 \leq i < j < r \leq k)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_k| = \left\lfloor \frac{n}{P_i P_j \dots P_k} \right\rfloor = \frac{n}{P_i P_j \dots P_k}$$

با جای گذاری رابطه‌های بالا در رابطه (۱)، خواهیم داشت:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = n - \left( \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(105) &= n(1 - \frac{1}{P_1})(1 - \frac{1}{P_r})(1 - \frac{1}{P_r}) \\ &= 3 \times 5 \times 7(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 2 \times 4 \times 6 = 48 \\ &\Rightarrow \varphi(105) = 48\end{aligned}$$

مثال. تعداد عددهای صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰

که در رابطه  $(a, 360) = 12$  صدق می کنند، چند تا است؟

حل. چون  $(a, 360) = 12$  پس  $a = 12k$  در نتیجه  $k \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} (a, 360) = 12 \\ a = 12k \end{cases} \Rightarrow (12k, 360) = 12 \Rightarrow (k, 30) = 1$$

در این مرحله باید تعداد عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که نسبت به ۳۰ اول هستند و این برابر با  $\varphi(30)$  است.  
 $n = 30 = 2 \times 3 \times 5 = P_1 \times P_r \times P_r$

$$\varphi(30) = 2 \times 3 \times 5(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 1 \times 2 \times 2 = 8$$

در نتیجه ۸ عدد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰ وجود دارد که در رابطه  $(a, 360) = 12$  صدق می کنند.

مثال. اگر برای عددهای صحیح  $m$  و  $n$  داشته باشیم  $180n + am = 1$  و  $a \leq 180$ ، آنگاه چند عدد طبیعی برای  $a$  یافت می شود؟

حل. چون برای عددهای صحیح  $m$  و  $n$  داریم  $180n + am = 1$  آنگاه طبق قضیه بزو نتیجه می گیریم که  $(180, a) = 1$ . ملاحظه می کنیم که تعداد عددهای طبیعی  $a \leq 180$  را می خواهیم به طوری که  $(180, a) = 1$ ، بنابراین کافی است  $\varphi(180)$  را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ \varphi(180) &= 2^2 \times 3^2 \times 5(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 2 \times 6 \times 4 = 48\end{aligned}$$

قضیه بزو. فرض کنیم که  $(a, b) = d$  در این صورت عددهای صحیح  $m$  و  $n$  یافت می شوند به گونه ای که  $ma + nb = d$

نتیجه. هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد نسبت به هم اول باشند، در

$$\sum_{1 \leq i < j < r \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_r| \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = n - \left( \sum_{i=1}^k \frac{n}{P_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{n}{P_i P_j} + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} \frac{n}{P_i P_j P_r} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{P_1 P_r \dots P_k} \right)$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = n \left( 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{P_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1}{P_i P_j} - \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} \frac{1}{P_i P_j P_r} + \dots + (-1)^n \frac{1}{P_1 P_r \dots P_k} \right)$$

طرف دوم برابری را در عبارت  $\frac{P_1 P_r \dots P_k}{P_1 P_r \dots P_k}$  ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned}\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| &= \frac{n}{P_1 P_r \dots P_k} [P_1 P_r \dots P_k - (P_1 P_r \dots P_k + P_1 P_r \dots P_k + P_1 P_r \dots P_k + \dots + P_1 P_r \dots P_{k-1}) + (P_1 P_r \dots P_k + P_1 P_r \dots P_k + \dots + P_1 P_r \dots P_{k-2}) - \dots + (-1)^{n-1} (P_k + P_{k-1} + \dots + P_1) + (-1)^n] \\ &= \frac{n}{P_1 P_r \dots P_k} [(P_1 - 1)(P_r - 1) \dots (P_k - 1)] \\ &= n \left[ \frac{(P_1 - 1)}{P_1} \times \frac{(P_r - 1)}{P_r} \times \dots \times \frac{(P_k - 1)}{P_k} \right] \\ &= n(1 - \frac{1}{P_1})(1 - \frac{1}{P_r}) \dots (1 - \frac{1}{P_k})\end{aligned}$$

مثال. ثابت کنید که  $\varphi(105) = 48$ .  
 حل. ابتدا عدد ۱۰۵ را به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه می کنیم:

$$\begin{aligned}n = 105 &= 3 \times 5 \times 7 = P_1 \times P_r \times P_r \\ \text{اکنون با توجه به قضیه قبل داریم:}\end{aligned}$$

# فکری و منطقی

3

**معمای ۱:** در بانکی سه شغل صندوقدار، رئیس و تحویلدار به B، J و S، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، داده شده است. تحویلدار که نوجوانی بیش نیست، از همه کم تر حقوق می گیرد. حقوق S، که باخواهر B ازدواج کرده، از مدیر بیش تر است. شغل هریک چیست؟

**معمای ۲:** C، D و F زندگی خود را به عنوان نجار، نقاش و لوله کش، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، می گذرانند. اخیراً نقاش از نجار تقاضا کرد که کاری برای او انجام دهد؛ اما به او گفته شد، نجار در کار تهیه ماکتی برای لوله کشی است. لوله کش بیش از نقاش درآمد دارد. درآمد D بیش از C است. F هرگز با D آشنا نبوده است. شغل هریک چیست؟



## تفریح اندیشه

جواب:  $c = ab$

حل: اگر مجموع دو ریشه، صفر باشد، ریشه ها قرینه یکدیگرند. ریشه های معادله را  $s$  و  $-s$  و  $t$  فرض می کنیم. در این صورت:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-s)(x+s)(x-t) \\ = x^3 - tx^2 - s^2x + s^2t$$

بنابراین داریم  $a = -t$  و  $b = -s^2$  و  $c = s^2t$

پس:

$$c = s^2t = (-b)(-a) = ab$$

این صورت عددهای صحیح  $m$  و  $n$  یافت می شوند به گونه ای که:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow ma + nb = 1$$

## چند خاصیت تابع حسابی اویلر

۱. اگر  $P$  یک عدد اول باشد، آنگاه  $\varphi(P) = P - 1$ .  
زیرا اگر  $P$  عددی اول باشد، آنگاه  $P$  با هریک از عضوهای مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, P-1\}$  متباین است.  
۲. اگر  $P$  یک عدد اول باشد و  $\alpha \in \mathbb{N}$  آنگاه  $\varphi(P^\alpha) = P^{(\alpha-1)}(P-1)$ .  
زیرا اگر  $P$  عددی اول باشد، آنگاه طبق قضیه تابع حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(P^\alpha) = P^\alpha \left(1 - \frac{1}{P}\right) = P^\alpha - P^{\alpha-1} = P^{\alpha-1}(P-1)$$

۳. اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند، آنگاه  $\varphi(n^m) = n^{(m-1)}\varphi(n)$ .

فرض کنیم  $n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k}$  در این صورت  $n^m = P_1^{m\alpha_1} \times P_2^{m\alpha_2} \times \dots \times P_k^{m\alpha_k}$  حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(n^m) = P_1^{m\alpha_1} \times P_2^{m\alpha_2} \times \dots \times P_k^{m\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right)$$

از طرفی  $P_i^{m\alpha_i} = P_i^{(m-1)\alpha_i} \times P_i^{\alpha_i}$  و می دانیم که:

$$\varphi(n^m) = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right)$$

در نتیجه داریم:

$$\varphi(n^m) = P_1^{(m-1)\alpha_1} \times P_2^{(m-1)\alpha_2} \times \dots \times P_k^{(m-1)\alpha_k} \\ \times P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right)$$

$$\varphi(n^m) = (P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k})^{(m-1)} \times \varphi(n)$$

$$\Rightarrow \varphi(n^m) = n^{(m-1)}\varphi(n)$$

۴. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند به طوری که

$$(a, b) = 1, \text{ آنگاه } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$