

تابع جزء صحیح

(قسمت ۲)

● میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = [2x]$ را در فاصله‌ی $[-1, 2]$ به دست آورید.

حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y = [2x]$ داریم $k = 2$ ، بنابراین:

$$x \in [-1, 2] \Rightarrow 2x \in [-2, 4]$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $[-2, 4]$ را به بازه‌هایی (با طول یک واحد) تقسیم کرده و مقدار $y = [2x]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:

$$-2 \leq 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$-1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq 2x < 3 \Rightarrow [2x] = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$3 \leq 2x < 4 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow y = 3$$

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در فاصله‌ی $[-6, 5]$ به دست آورید.

حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ داریم

$k = \frac{1}{3}$ ، بنابراین:

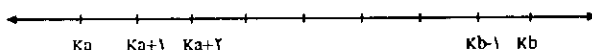
می‌خواهیم تابع با ضابطه‌ی $y = [2x]$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا باید مقادیر عددی $y = [2x]$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ به دست آورده، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم. به همین سبب، مطلب زیر را می‌آوریم.

مقادیر $y = [kx]$ در بازه‌ی $a, b \in \mathbb{Z}; [a, b]$

برای محاسبه‌ی مقادیر $y = [kx]$ در بازه‌ی $[a, b]$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: $x \in [a, b] \Rightarrow kx \in [ka, kb]$

مرحله‌ی دوم: با فرض این که $ka \in \mathbb{Z}$ ، بازه‌ی $[ka, kb]$ را به صورت زیر، به بازه‌های متفاوت (با طول یک واحد) تقسیم کرده و در هر بازه مقدار $y = [kx]$ را محاسبه می‌کنیم:



$$ka \leq kx < ka + 1 \Rightarrow [kx] = ka \Rightarrow y = ka$$

$$ka + 1 \leq kx < ka + 2 \Rightarrow [kx] = ka + 1 \Rightarrow y = ka + 1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$kb - 1 \leq kx < kb \Rightarrow [kx] = kb - 1 \Rightarrow y = kb - 1$$

اشاره

در شماره‌ی پیشین، تابع جزء صحیح را تعریف و رفتار آن را بررسی کردیم. سپس با خاصیت‌های این تابع آشنا شدیم و کاربردهای آن‌ها را در حل مسائل گوناگون دیدیم. اینک در ادامه‌ی مطالب گذشته، رسم توابع جزء صحیح را در پی می‌آوریم.

$$\frac{ka+1}{k} \leq x < \frac{ka+2}{k} \Leftrightarrow ka+1 \leq kx < ka+2 \Rightarrow [kx] = ka+1$$

$$\Rightarrow y = ka+1+mx$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\frac{kb-1}{k} \leq x < b \Leftrightarrow kb-1 \leq kx < kb \Rightarrow [kx] = kb-1$$

$$\Rightarrow y = kb-1+mx$$

اکنون نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ka+1+mx$ را در فاصله‌ی

$a \leq x < \frac{ka+1}{k}$ رسم می‌کنیم و نمودار تابع با ضابطه‌ی

$y = ka+1+mx$ را در فاصله‌ی $\frac{ka+1}{k} \leq x < \frac{ka+2}{k}$ و ... و

نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = kb-1+mx$ را در فاصله‌ی

$\frac{kb-1}{k} \leq x < b$ رسم می‌کنیم.

برای روشن‌تر شدن مطلب، این مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [2x+1]$ را در فاصله‌ی

$[-1, 1)$ رسم کنید.

حل:

روش اول:

$$y = [2x+1] \Rightarrow y = [2x]+1$$

$$x \in [-1, 1) \Rightarrow 2x \in [-2, 2)$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2$$

$$\Rightarrow y = -2+1 \Rightarrow y = -1$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1$$

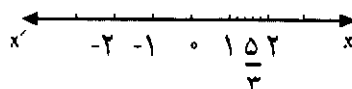
$$\Rightarrow y = -1+1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow y = 0+1 \Rightarrow y = 1$$

$$x \in [-6, 5) \Rightarrow \frac{1}{3}x \in \left[-2, \frac{5}{3}\right)$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $\left[-2, \frac{5}{3}\right)$ را به بازه‌هایی تقسیم کرده و

مقدار $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:



$$-2 \leq \frac{1}{3}x < -1 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq \frac{1}{3}x < \frac{5}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x\right] = 1 \Rightarrow y = 1$$

رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [kx] + mx$ در بازه‌ی

$$a, b \in \mathbb{Z}; [a, b)$$

برای رسم نمودار این تابع، ابتدا مقادیر $[kx]$ را در بازه‌ی $[a, b)$ ، به دست می‌آوریم و مقادیر به دست آمده در هر بازه را در ضابطه‌ی تابع $y = [kx] + mx$ قرار می‌دهیم. سپس نمودار هر کدام را در بازه‌های متناظر با آن رسم می‌کنیم. یعنی:

$$x \in [a, b) \Rightarrow kx \in [ka, kb)$$

با فرض این که $ka \in \mathbb{Z}$ ، داریم:

$$a \leq x < \frac{ka+1}{k} \Leftrightarrow ka \leq kx < ka+1 \Rightarrow [kx] = ka$$

$$\Rightarrow y = ka+mx$$

$$y = -2 + x + 1 \Rightarrow y = x - 1; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & -1 \end{array}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \Rightarrow$$

$$y = -1 + x + 1 \Rightarrow y = x; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 + x + 1 \Rightarrow y = x + 1; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow$$

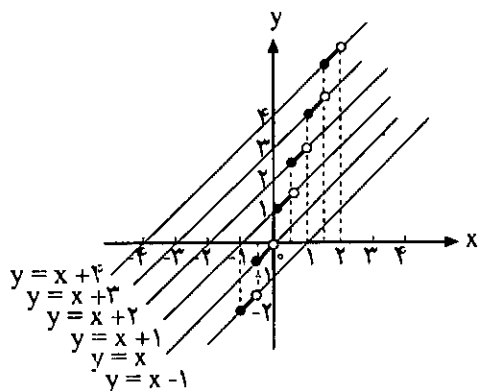
$$y = 1 + x + 1 \Rightarrow y = x + 2; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & 2 \end{array}$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow [2x] = 2 \Rightarrow$$

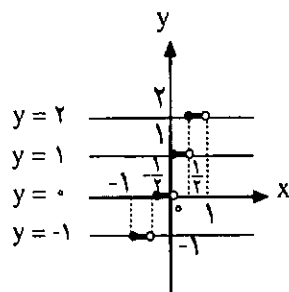
$$y = 2 + x + 1 \Rightarrow y = x + 3; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & 3 \end{array}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Leftrightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow$$

$$y = 3 + x + 1 \Rightarrow y = x + 4; \begin{array}{c|c} x & 0 \\ y & 4 \end{array}$$

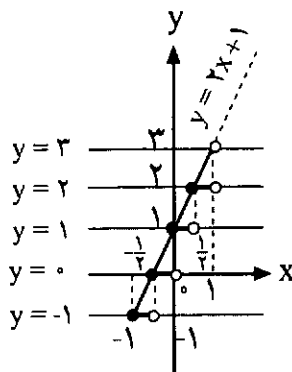


$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 \Rightarrow y = 2$$



روش دوم: ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = 2x + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم می‌کنیم. سپس خطوطی به معادله $y = k (k \in \mathbb{Z})$ را موازی محور طول‌ها می‌کشیم. اکنون در فاصله $(-1, 1)$ ، قطعه‌هایی از خط به معادله $y = 2x + 1$ را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم تا این که نمودار تابع در فاصله $[-1, 1]$ به دست آید.

$$y = 2x + 1; \begin{array}{c|c} x & -1 \\ y & -1 \end{array}$$



مثال: نمودار تابع با ضابطه $y = [2x + 1] + x$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

$$y = [2x + 1] + x \Rightarrow y = [2x] + x + 1$$

$$x \in [-1, 2] \Rightarrow 2x \in [-2, 4)$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \Rightarrow$$

$$x \in [0, 5), y = x - [x]$$

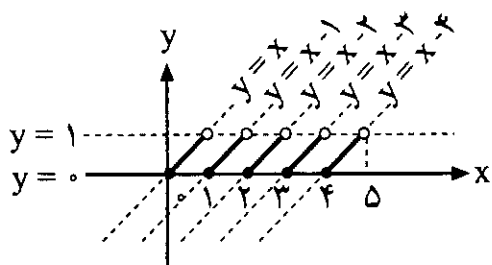
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1; \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \quad 2 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - 2; \quad \begin{array}{c|c} x & 2 \quad 3 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow y = x - 3; \quad \begin{array}{c|c} x & 3 \quad 4 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow y = x - 4; \quad \begin{array}{c|c} x & 4 \quad 5 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$



توجه: در خاصیت‌های تابع جزء صحیح گفتیم که $0 \leq x - [x] < 1$ (شماره‌ی قبل - خاصیت ۲). همان‌طور که در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، نمودار تابع باضابطه‌ی $y = x - [x]$ بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد.

مثال: نمودار تابع باضابطه‌ی $y = [|x|]$ را در فاصله‌ی $y = [-2, 2]$ رسم کنید.

حل:

نمودار تابع باضابطه‌ی $y = |x|$ را در بازه‌ی $y = [-2, 2]$ رسم می‌کنیم. سپس خط‌های افقی $y = k$ را رسم می‌کنیم و قطعه‌هایی از آن را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع باضابطه‌ی $y = x \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor + 3$ را در بازه‌ی $y = [-2, 4]$ رسم کنید.

حل:

$$x \in (-2, 4) \Rightarrow \frac{1}{2}x \in (-1, 2)$$

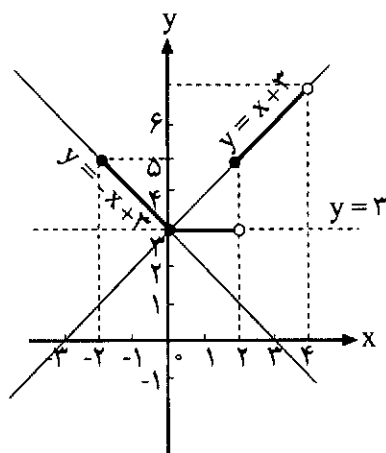
$$-2 \leq x < 0 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = -1 \Rightarrow$$

$$y = -x + 3; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 3 \\ \hline y & 3 \quad 0 \end{array}$$

$$0 \leq x < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$2 \leq x < 4 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = 1 \Rightarrow$$

$$y = x + 3; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad -3 \\ \hline y & 3 \quad 0 \end{array}$$



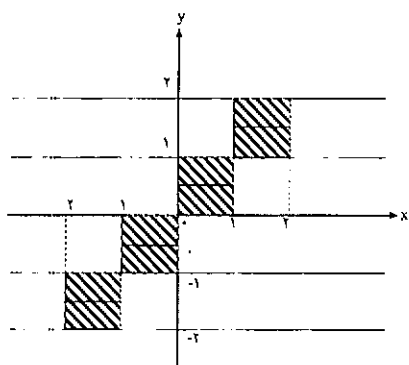
مثال: نمودار تابع باضابطه‌ی $y = x - [x]$ را در بازه‌ی $y = [0, 5]$ رسم کنید.

حل:

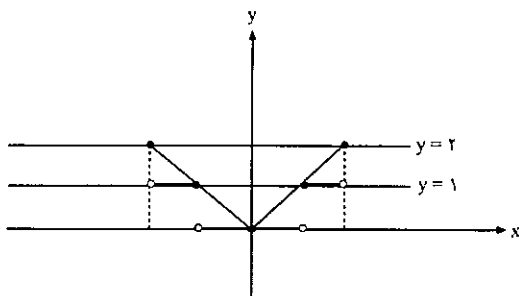
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow [y] = -1 \Rightarrow -1 \leq y < 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [y] = 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$$



$$y = [x]; \begin{array}{c|cc} x & -2 & 0 & 2 \\ \hline y & -2 & 0 & 2 \end{array}$$



مثال: نمودار تابع با ضابطه ی $y = [x]$ را در فاصله ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

حل:

نمودار بالا نمونه ای از دسته ی توابع پله ای است.

مثال: نمودار تابع با ضابطه ی $y = x^2[x]$ را در بازه ی $[-3, 2]$ رسم کنید.

حل:

$$x \in [-3, 2], y = x^2[x]$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = x^2 \times (-3) \Rightarrow$$

$$y = -3x^2; \begin{array}{c|cc} x & -3 & -2 \\ \hline y & -27 & -12 \end{array}$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x^2 \times (-2) \Rightarrow$$

$$y = -2x^2; \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline y & -8 & -2 \end{array}$$

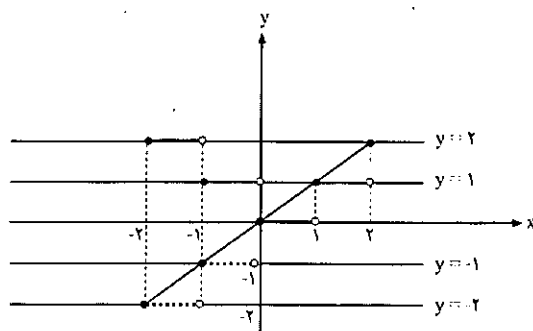
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x^2 \times (-1)$$

$$\Rightarrow y = -x^2; \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x^2 \times (0) \Rightarrow y = 0; \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 0 \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x^2 \times (1) \Rightarrow y = x^2; \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 4 \end{array}$$

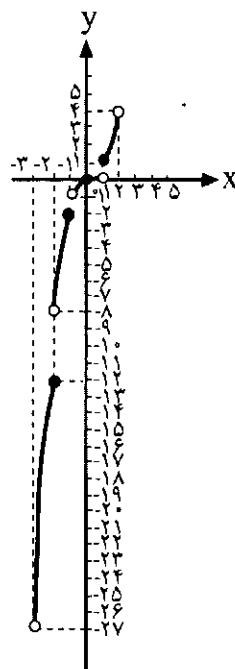
نمودار تابع با ضابطه ی $y = [x]$ را در فاصله ی $[-2, 2]$ رسم می کنیم. سپس قریبه ی قسمتی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد، نسبت به محور x رسم می کنیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه ی $[y] = [x]$ را در فاصله ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

حل:

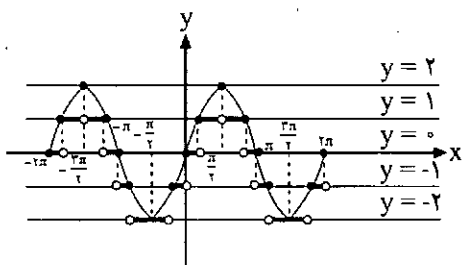
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow [y] = -2 \Rightarrow -2 \leq y < -1$$



مثال: نمودار تابع با ضابطه $y = [2 \sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می کنید.

حل: مرحله ی اول- منحنی نمایش $y = 2 \sin x$ را رسم می کنیم.

مرحله ی دوم- خطوط $y = -2$ ، $y = -1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $y = 2$ را می کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -2$ و $y = -1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y = -2$ تصویر می کنیم و قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y = -1$ تصویر می کنیم^۱ و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y = 0$ تصویر می کنیم و در مرحله ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 1$ و $y = 2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y = 1$ تصویر می کنیم تا نمودار این تابع را به دست آوریم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه $y = [k \cos x]$ را که در آن $|k| \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ است، در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: مرحله ی اول- ابتدا منحنی $y = k \cos x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می کنیم.

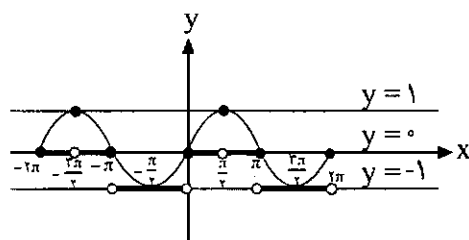
مرحله ی دوم- خطوط $y = -k$ و $y = -k+1$ و $y = -k+2$... و $y = k-1$ و $y = k$ را رسم می کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می کنیم. سپس

مثال: نمودار تابع با ضابطه $y = [\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ی اول- ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y = \sin x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می کنیم.

مرحله ی دوم- سه خط به معادله های $y = -1$ و $y = 0$ و $y = 1$ را می کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط قرار دارند، با نقاطی توپر مشخص می کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y = -1$ تصویر می کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y = 0$ تصویر می کنیم.



خودآزمایی

نمودار توابع زیر را در فاصله‌های داده شده رسم کنید.

۱. $y = x + [\frac{x}{4}]$; $[0, 6]$

۲. $y = \frac{x}{4} - [\frac{x}{4}]$; $[-3, 4]$

۳. $y = [\sin(x + \frac{\pi}{4})]$; $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$

۴. $y = x + [x]$; $[1, 5]$

۵. $y = [\sqrt{x}]$; $[0, 10]$

۶. $y = [\cos(x + \frac{\pi}{4})]$; $[-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

۷. $y = \frac{x}{[x]}$; $[-2, 1]$

۸. $y = \frac{x+1}{[x]}$; $[-2, 2]$

۹. $y = [\frac{x}{4} - 1]$; $[-8, 2]$

۱۰. $y = 2x - [3x]$; $[-1, 2]$

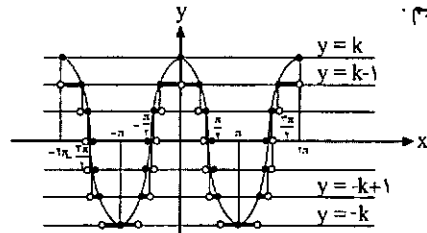
زیرنویس

۱. به طور کلی، قسمتی از منحنی را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی به معادله‌های $y=i+1$ و $y=i$ قرار داشته باشد، آن را روی خط به معادله $y=i$ تصویر می‌کنیم.

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات ۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم ۱۳۸۵.
۲. صدر، میرشهرام. رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی درجه‌ی اول با روش نقطه‌یابی و انتقال. مجله‌ی ریاضی برهان متوسطه ۲۲. انتشارات مدرسه. پاییز ۱۳۷۶.

قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y = -k$ و $y = -k+1$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y = -k$ تصویر می‌کنیم، و... به همین ترتیب در مرحله‌ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y = k-1$ و $y = k$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y = k-1$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع را به دست آوریم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [x^2]$ را در فاصله‌ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

حل: مرحله‌ی اول- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2$ را در فاصله‌ی $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم- خطوط افقی موازی محور طول‌ها به معادله‌ی $y = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) را رسم می‌کنیم و نقاطی از نمودار را که روی خطوط افقی قرار دارند، پررنگ می‌کنیم.

اکنون قسمتی از نمودار را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

$$y = x^2 ; \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

