

تابع جزء صحیح

(قسمت ۱)

میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com



ورود به مطلب

در نتیجه، از ۱ تا ۵۰۰ سی و هشت عدد وجود دارند که بر ۱۳ بخش پذیرند و مسأله حل شد.

اما به طور ساده تر و بدون تشکیل دنباله، و فقط با استفاده از الگوریتم تقسیم هم می توان به این موضوع پی برد.

$$500 = 38 \times 13 + 6$$

$$\Rightarrow \frac{500}{13} = 38 + \frac{6}{13} \quad (1)$$

رابطه ی ۱ به این معناست که در تقسیم ۵۰۰ بر ۱۳ سی و هشت عدد وجود دارند که مضرب ۱۳ هستند. اکنون به رابطه ی ۱ بیشتر توجه می کنیم. در این رابطه، ۳۸ را جزء صحیح یا بخش درست عدد $\frac{500}{13}$ و $\frac{6}{13}$ را جزء اعشاری یا

بخش کسری $\frac{500}{13}$ می نامیم. جزء صحیح $\frac{500}{13}$ را با نماد $\left[\frac{500}{13} \right]$ نمایش می دهیم. بنابراین: $\left[\frac{500}{13} \right] = 38$

نتیجه: هرگاه n و k عددهایی طبیعی باشند، تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا n که بر k بخش پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{k} \right]$ است.

□

جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی مانند x ، عدد صحیحی مانند n وجود دارد، به طوری که: $n \leq x < n+1$. در این صورت، جزء صحیح x را برابر با n تعریف می کنیم. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

زنگ دوم دوشنبه ی هفته ی آخر آذر، قرار بود تابع جزء صحیح را به دانش آموزان سال دوم تدریس کنم. با خود گفتم، قبل از تعریف جزء صحیح، بهتر است با مثالی ساده درس را شروع کنم؛ شاید دانش آموزان مفهوم جزء صحیح را با مثال روزمره بهتر درک کنند و می درنگ این مثال را طرح کردم.

مثال: بچه ها فکر می کنید بین ۱ تا ۵۰۰، چند عدد وجود داشته باشد که بر ۱۳ بخش پذیر باشند؟

بعد از بحث میان بچه ها، اغلب آن ها بر این باور بودند که بهتر است، تعداد مضارب طبیعی ۱۳ را بین ۱ تا ۵۰۰ محاسبه کنیم و چنین عمل کردند:

$$13 \times 1, 13 \times 2, 13 \times 3, 13 \times 4, \dots$$

آن ها دنباله ای ساخته بودند که مضارب طبیعی ۱۳ را نشان می داد و آخرین جمله ی این دنباله، کوچک تر از ۵۰۰ بود؛ ولی مقدار آن را نمی دانستند. به آن ها گفتم، با توجه به تعریف تقسیم می توان، جمله ی آخر این دنباله را محاسبه کرد:

$$\begin{array}{r} 500 \div 13 \\ 38 \times 13 = 494 \\ \hline 6 \end{array}$$

روشن است که آخرین عدد طبیعی کوچک تر از ۵۰۰ که بر ۱۳ بخش پذیر است، برابر با 13×38 است.

بنابراین، دنباله ی اعداد دانش آموزان را کامل کردم:

$$13 \times 1, 13 \times 2, 13 \times 3, \dots, 13 \times 38$$

داشت:

$$x = [x] + \alpha; (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\Rightarrow x - [x] = \alpha; (0 \leq \alpha < 1) \quad (2)$$

بنابه تعریف، مقدار $x - [x]$ را که همان مقدار α است؛ جزء اعشاری یا بخش کسری x تعریف می کنیم. با توجه به رابطه ی ۲ ملاحظه می کنیم، جزء اعشاری هر عدد حقیقی همواره نامنفی و کوچک تر از ۱ است.

مثال: جزء اعشاری عددهای $3\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{3}$ را به دست آورید.

حل: فرض کنیم: $x = 3\sqrt{2}$ و $y = -2\sqrt{3}$. بنابراین داریم:

$$x = 3\sqrt{2} \approx 4/2 \Rightarrow [x] = [4/2] = 2$$

$$3\sqrt{2} - [x] = 4/2 - 2 = 0/2$$

$$y = -2\sqrt{3} \approx -3/4 \Rightarrow [y] = [-3/4] = -1$$

$$-2\sqrt{3} - [y] = -3/4 - (-1) = 1/4$$

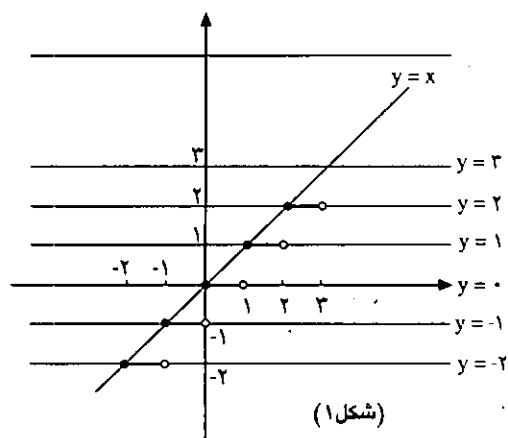
□

تابع جزء صحیح

تابع با ضابطه ی $f(x) = [x]$ که دامنه ی آن مجموعه ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است، تابع جزء صحیح گفته می شود. بنابراین تابع جزء صحیح به این صورت است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ f(x) = [x] \end{cases}$$

می دانیم که نمودار تابع جزء صحیح چنین است:



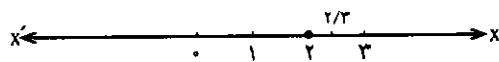
(شکل ۱)

در این جا می خواهیم به بررسی خواص و رفتار تابع جزء صحیح بپردازیم. بنابراین موارد زیر را تحقیق می کنیم. □ یک به یک بودن تابع؛

$$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$$

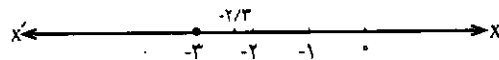
برای مثال، وقتی عدد $x = 2/3$ را در نظر می گیریم، ملاحظه می کنیم که عدد صحیح $n = 2$ موجود است، به طوری که:

$$2 \leq 2/3 < 2+1 \Rightarrow [2/3] = 2$$



به همین صورت، وقتی عدد $x = -2/3$ را در نظر می گیریم، ملاحظه می کنیم که عدد صحیح $n = -3$ موجود است، به طوری که:

$$-3 \leq -2/3 < -3+1 \Rightarrow [-2/3] = -3$$



به عبارت دیگر، می توان جزء صحیح x را به این صورت تعریف کرد: «بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x را، جزء صحیح x می گوئیم».

مثال:

الف) $[-1/7] = -2$ ؛ زیرا: $-2 \leq -1/7 < -1$.

ب) $[5] = 5$ ؛ زیرا: $5 \leq 5 < 6$.

ج) هرگاه داشته باشیم: $4 \leq x < 5$ ، در این صورت $[x] = 4$.

د) هرگاه داشته باشیم: $[x] = 7$ ، در این صورت $7 \leq x < 8$.

ه) $[\sqrt{2}] = 1$ ؛ زیرا: $1 \leq \sqrt{2} = 1/4 < 2$.

و) $[-\pi] = -4$ ؛ زیرا: $-4 \leq -\pi = -3/14 < -3$.

ز) $[\frac{17}{3}] = 5$ ؛ زیرا: $5 \leq \frac{17}{3} = 5/6 < 6$.

ح) $[\frac{3}{\pi}] = 0$ ؛ زیرا: $0 \leq \frac{3}{\pi} = 0/95 < 1$ ، با توجه به این

که $\pi = 3/14$.

مثال: معادله ی $2 + 2[x] = 8$ را حل کنید.

$2 + 2[x] = 8 \Rightarrow 2[x] = 6 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [3, 4)$

جزء اعشاری

هرگاه x یک عدد حقیقی باشد، به طوری که $[x] = k$ ، می توان نوشت:

$$x = k + \alpha; (0 \leq \alpha < 1)$$

اکنون اگر در این رابطه قرار دهیم $k = [x]$ ، خواهیم

□ فرد یا زوج بودن تابع؛

□ متناوب بودن تابع؛

□ معکوس پذیری تابع؛

□ صعودی یا نزولی بودن تابع

$x \in D_f = \mathbb{R}$ داریم: $(x \pm T) \in D_f$ و هم چنین:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f\left(x+\frac{1}{a}\right) = a\left(x+\frac{1}{a}\right) - \left[a\left(x+\frac{1}{a}\right)\right] \\ &= ax+1 - [ax+1] \\ &= ax+1 - (ax+1) = ax - [ax] = f(x) \\ \Rightarrow f(x+T) &= f(x) \end{aligned}$$

بررسی معکوس پذیری تابع

چنان که ملاحظه کردید، تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ یک به یک نیست. در نتیجه، این تابع معکوس پذیر نمی باشد.

بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ در بازه های $n \in \mathbb{Z}; [n, n+1)$ صعودی و نزولی است، زیرا برای هر $x_1, x_2 \in [n, n+1)$ که $x_1 < x_2$ خواهیم داشت:

$n \leq x_1 < x_2 < n+1 \Rightarrow [x_1] = [x_2]$
بنابراین، رابطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f صعودی است.
هم چنین، رابطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f نزولی است.

□

خاصیت های تابع جزء صحیح

خاصیت ۱. $[x] \leq x < [x] + 1$
زیرا با فرض این که $[x] = n \in \mathbb{Z}$ ، داریم:
 $n \leq x < n+1$

و این رابطه برقراری است.

مثال: مقدار x را از این معادله به دست آورید:

$$\left[\frac{6x+5}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}$$

حل: چون $\left[\frac{6x+5}{8} \right]$ عددی صحیح است، بنابراین:

$$\frac{15x-7}{5} = k \in \mathbb{Z} \quad (1) \Rightarrow 15x-7 = 5k$$

$$\Rightarrow x = \frac{5k+7}{15} \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه های ۱ و ۲ در معادله داریم:

$$\left[\frac{\frac{6(5k+7)}{15} + 5}{8} \right] = k \Rightarrow \left[\frac{10k+39}{40} \right] = k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{10k+39}{40} < k+1$$

بررسی یک به یک بودن تابع

تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ یک به یک نیست، زیرا برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow [x_1] = [x_2] \Rightarrow x_1 = x_2$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۱ ملاحظه می کنیم، (برای مثال) خط به معادله $y = 1$ نمودار تابع را در بی شمار نقطه قطع می کند. فرض کنید: $x_1 = 1/7$ و $x_2 = 1/3$ و $x_1 \neq x_2$. ملاحظه می کنیم:

$$\begin{cases} f(x_1) = [1/7] = 1 \\ f(x_2) = [1/3] = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

بنابراین در تابع، جزء صحیح $f(x_1)$ می تواند برابر با $f(x_2)$ باشد، در حالی که $x_1 \neq x_2$.

بررسی فرد یا زوج بودن تابع

تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ فرد یا زوج نیست، زیرا برای هر $x \in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} -x \in D_f = \mathbb{R} \\ f(-x) \neq \pm f(x) \end{cases}$$

از یک طرف، با توجه به شکل ملاحظه می کنیم، نمودار این تابع نسبت به محور y ها متقارن نیست، پس این تابع نمی تواند زوج باشد. از طرف دیگر، مبدأ مختصات مرکز تقارن این تابع نیست، پس این تابع نمی تواند فرد باشد. برای مثال فرض کنیم: $x = 2/3$. بنابراین داریم:

$$x = 2/3 \Rightarrow \begin{cases} f(-x) = [-2/3] = -1 \\ \pm f(x) = \pm [2/3] = \pm 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) \neq \pm f(x)$$

بررسی متناوب بودن تابع

تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ متناوب نیست؛ زیرا برای هر $T \neq 0, x \in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} (x \pm T) \in D_f = \mathbb{R} \\ f(x+T) = [x+T] \neq [x] \Rightarrow f(x+T) \neq f(x) \end{cases}$$

نکته: تابع به معادله $f(x) = ax - [ax]$ متناوب و دوره ی تناوب اصلی آن $T = \frac{1}{a}$ است ($a \neq 0$). زیرا برای هر

اکنون باید دستگاه نامعادله های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{10k+39}{40} \geq k \\ \frac{10k+39}{40} < k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq \frac{13}{10} \\ k > -\frac{1}{30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{30} < k \leq \frac{13}{10} \quad (3)$$

چون k عددی درست است و در رابطه ی ۳ صدق می کند، پس $k=0$ یا $k=1$ که با قرار دادن این مقادیر به جای k در رابطه ی ۲، مقادیرهای x به دست می آیند.

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{7}{15}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

در نتیجه، معادله ی مفروض دارای دوریشه ی $\frac{7}{15}$ و $\frac{4}{5}$ است.

خاصیت ۲. هرگاه $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$ داریم.

$$[x+n] = [x] + n$$

زیرا اگر $m \leq x < m+1$ ، آن گاه $[x] = m$ و همچنین:

$$m \leq x < m+1 \Rightarrow m+n \leq x+n < (m+n)+1$$

$$\Rightarrow [x+n] = m+n = [x] + n$$

مثال:

$$[-5/3+2] = [-5/3] + 2 = -6+2 = -4$$

$$[x+7] = [x] + 7$$

$$[3x-4] = [3x] - 4$$

$$[x+[x]+1] = [x] + [x] + 1 = 2[x] + 1$$

مثال: معادله ی $4 = 2\left[\frac{x}{2} - 3\right] - 2\left[\frac{x}{2} + 1\right]$ را حل کنید.

حل:

$$\left[\frac{x}{2} + 1\right] - 2\left[\frac{x}{2} - 3\right] = 4 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] + 1 - 2\left(\left[\frac{x}{2}\right] - 3\right) = 4$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] + 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right] + 6 = 4 \Rightarrow -\left[\frac{x}{2}\right] = -3$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{x}{2} < 4 \Rightarrow 6 \leq x < 8$$

در نتیجه مجموعه جواب این معادله به صورت $[6, 8)$ است.

خاصیت ۳. برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

اگر فرض کنیم: $[x] = n$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \\ [x] = n \end{cases} \Rightarrow [x] \leq x < [x] + 1$$

$$\Rightarrow [x] - [x] \leq x - [x] \leq [x] + 1 - [x] \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1$$

مثال: اگر $x - k = 2\left[\frac{x}{2} + 1\right]$ ، در این صورت مجموعه مقادیر k را به دست آورید.
حل:

$$x - k = 2\left(\left[\frac{x}{2}\right] + 1\right) \Rightarrow x - k = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{k}{2} = \left[\frac{x}{2}\right] + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] = \frac{k}{2} + 1$$

چون $0 \leq \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] < 1$ ، بنابراین داریم:

$$0 \leq \frac{k}{2} + 1 < 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{k}{2} < 0 \Rightarrow -2 \leq k < 0$$

در نتیجه، مجموعه مقادیر k به صورت $[-2, 0)$ است.

خاصیت ۴. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x = n \in \mathbb{Z}$ ، در این صورت $[x] = n$ و

داریم:

$$x = n \Rightarrow -x = -n \Rightarrow [-x] = [-n] = -n \Rightarrow [-x] = -n$$

از طرف دیگر، $[x] = n$. بنابراین داریم:

$$[-x] = -[x]$$

حالت دوم: اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین $n \in \mathbb{Z}$ موجود است،

به طوری که $n < x < n+1$. در نتیجه $[x] = n$ و داریم:

$$n < x < n+1 \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در } -1} -(n+1) < -x < -n$$

$$\Rightarrow -n-1 < -x < -n$$

از طرف دیگر $[x] = n$ یا $[x] = -n-1$. در نتیجه داریم:

$$-[x] - 1 < -x < -[x] \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

مثال: معادله ی $1 = 3 - 2[-x]$ را حل کنید.

$$3 - 2[-x] = 1 \Rightarrow -2[-x] = -2 \Rightarrow [-x] = 1$$

حالت اول: اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، در این صورت $[-x] = -[x]$. پس داریم:

$$[-x] = 1 \text{ و } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow -[x] = 1 \Rightarrow [x] = -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow x \in [-1, 0)$$

$$x \in [-1, 0) \text{ و } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -1$$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ ، در این صورت
 $-1 = -[x] = [-x]$ پس داریم:

$$[-x] = 1 \text{ و } x \notin Z \Rightarrow -[x] - 1 = 1 \Rightarrow [x] = -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x < -1 \Rightarrow x \in (-2, -1)$$

$$x \in (-2, -1) \text{ و } x \notin Z \Rightarrow x \in (-2, -1)$$

$$\text{مجموعه جواب معادله} = (-2, -1) \cup \{-1\} = (-2, -1]$$

خاصیت ۵. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x \in Z$ ، با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$$[-x] = -[x] \Rightarrow [x] + [-x] = [x] - [x] = 0$$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$$[-x] = -[x] - 1 \Rightarrow [x] + [-x] = [x] - [x] - 1 = -1$$

مثال: مجموعه جواب معادله $3[x] + 2[-x] = 6$ را

به دست آورید.

حل:

حالت اول: اگر $x \in Z$ ، در این صورت $[x] + [-x] = 0$.

بنابراین داریم:

$$3[x] + 2[-x] = 6 \Rightarrow [x] + 2([x] + [-x]) = 6$$

$$\Rightarrow [x] = 6 \Rightarrow 6 \leq x < 7$$

$$6 \leq x < 7 \text{ و } x \in Z \Rightarrow x = 6$$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ ، آن گاه $[x] + [-x] = -1$.

بنابراین داریم:

$$3[x] + 2[-x] = 6 \Rightarrow [x] + 2([x] + [-x]) = 6$$

$$\Rightarrow [x] - 2 = 6 \Rightarrow [x] = 8 \Rightarrow 8 \leq x < 9$$

$$8 \leq x < 9 \text{ و } x \notin Z \Rightarrow x \in (8, 9)$$

$$\text{مجموعه جواب معادله} = (8, 9) \cup \{6\}$$

مثال: معادله $\left[\frac{5}{3x-7}\right] + \left[\frac{-5}{3x-7}\right] = 0$ چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم $k = \frac{5}{3x-7}$ ، بنابراین داریم:

$$[k] + [-k] = 0$$

رابطه ی اخیر برای هر $k \in Z$ برقرار است. بنابراین معادله

بی شمار ریشه به صورت زیر دارد:

$$k = \frac{5}{3x-7} \Rightarrow x = \frac{vk+5}{3k}$$

برای هر $k \in Z$ ، ریشه ای از معادله به دست می آید.

خاصیت ۶. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$[x+y] = [x] + [y] + 1 \text{ یا } [x+y] = [x] + [y]$$

برهان: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x = [x] + \alpha; 0 \leq \alpha < 1$$

$$y = [y] + \beta; 0 \leq \beta < 1$$

اکنون فرض کنیم $[x] = n$ و $[y] = m$ که $n, m \in Z$

پس:

$$x+y = [x] + [y] + \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow x+y = n+m+\alpha+\beta$$

$$\Rightarrow [x+y] = [n+m+\alpha+\beta]$$

$$\Rightarrow [x+y] = n+m + [\alpha+\beta]$$

$$\Rightarrow [x+y] = [x] + [y] + [\alpha+\beta] \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < 1 \\ 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \alpha + \beta < 2$$

بنابراین دو حالت را در نظر می گیریم.

حالت اول: اگر $0 \leq \alpha + \beta < 1$ ، بنابراین $[\alpha + \beta] = 0$. در

نتیجه با توجه به رابطه ی ۱ داریم:

$$[x+y] = [x] + [y]$$

حالت دوم: اگر $1 \leq \alpha + \beta < 2$ ، پس $[\alpha + \beta] = 1$. در

نتیجه با توجه به رابطه ی ۱ داریم:

$$[x+y] = [x] + [y] + 1$$

نتیجه: با توجه به خاصیت ۶ برای عددهای حقیقی x و y

می توان نوشت:

$$[x+y] \leq [x] + [y]$$

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات ۲.

مؤسسه ی آموزش از راه دور. چاپ دوم. ۱۳۸۵.

۲. قندهاری، احمد و امیری، حمیدرضا. تابع. انتشارات مدرسه ی برهان. چاپ

اول. ۱۳۷۶.

۳. فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضی انتشارات مدرسه. انتشارات مدرسه ی برهان. چاپ

سوم. ۱۳۸۵.

۴. شهریار، پرویز. ریاضیات محاسبه ای ۳. انتشارات مجید. چاپ دوم. ۱۳۷۵.