

تئوری زوج خط

● سیامک جعفری



$$a \left[x - \frac{-(hy+g) + \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a} \right] \\ \times \left[x - \frac{-(hy+g) - \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a} \right] = 0$$

به عبارت ساده تر:

$$\left[(ax + by + c) - \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)} \right] \\ \times \left[(ax + by + c) + \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)} \right]$$

عبارت بالا وقتی خطی می شود که مقدارهای زیر رادیکال مربع کامل باشند. یعنی اگر بر حسب y مرتب شوند، عبارت زیر مربع کامل باشد. $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac)$ یعنی معادله $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac) = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta' = 0 \Rightarrow (gh - af)^2 = (h^2 - ab)(g^2 - ac)$$

عبارت اخیر را به شکل دترمینان می نویسیم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

به طور خلاصه اگر $a \neq 0$ باشد، آنگاه $S(x, y) = 0$ وقتی

(۱) شکل کلی معادله درجه دوم به صورت زیر است:

$$S(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

اگر $D \equiv ax + by + c = 0$ و $D' \equiv lx + my + n = 0$ معادلات دو خط راست باشد، به معادله $DD' = 0$ توجه بفرمایید.

$$DD': (ax + by + c)(lx + my + n) = 0$$

مشخص است که:

(۱) اگر $P(x_1, y_1)$ روی D (یا D') باشد، روی مکان

DD' نیز هست.

(۲) برعکس اگر $DD' = 0$ برای یک $P(x_1, y_1)$ ، آنگاه این نقطه روی D یا D' است.

(۳) اگر برای $P(x_1, y_1)$ ، $D \neq 0$ و $D' \neq 0$ آنگاه $DD' \neq 0$

می شود، یعنی نقطه $P(x_1, y_1)$ روی مکان DD' نیز نیست.

به طور کلی $DD' = 0$ نمایش یک زوج خط مانند $D = 0$ و $D' = 0$ خواهد شد. این معادله $DD' = 0$ نسبت به x و y درجه دوم است.

(۲) حال اگر $S(x, y) = 0$ نمایش یک زوج خط باشد، باید

به شکل $DD' = 0$ قابل تبدیل باشد، سه حالت را بررسی می کنیم:

$$a \neq 0 \quad (۱)$$

معادله را نسبت به x مرتب می کنیم:

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

طبق تئوری معادله درجه دوم خواهد شد.

$S(x, y)$ که بر حسب x و y درجه دوم هستند یکی باشند، زوج

خط $H(x, y) = 0$ موازی زوج خط $S(x, y) = 0$ است.

(۱) شیب زوج خط $H(x, y) = 0$

$$S = m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad p = m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲)

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow m^2 - (m_1 + m_2)m + (m_1 m_2) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + \frac{2h}{b}m + \frac{a}{b} = 0$$

$$\Rightarrow bm^2 + 2hm + a = 0$$

شیب زوج خط ریشه معادله درجه دوم اخیر است. آشکار است

طبق تمرین (۱) داده شده، برای تعیین شیب زوج خط

$S(x, y) = 0$ نیز به همین ترتیب به دست می آید.

تمرین (۲): در وجود شیب زوج خط بحث کنید.

(۲) زاویه بین زوج خط $H(x, y) = 0$

$$\text{tg}(D, D') = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

با توجه به بحث قبل و تئوری معادله درجه دوم

$$\text{tg}(D, D') = \frac{(\sqrt{h^2 - ab})/b}{1 + \frac{a}{b}}$$

$$\text{tg}(D, D') = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

به همین ترتیب زاویه بین زوج خط $S(x, y) = 0$ که عبارت

درجه دوم آن با $H(x, y) = 0$ یکی است نیز به دست می آید.

(۳) نیمسازهای زوج خط $H(x, y) = 0$

نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع آن

زاویه به یک فاصله است.

(۴) طبق فرمول محاسبه فاصله یک نقطه از خط. اگر دو

خط را به صورت $y = m_1 x$ و $y = m_2 x$ در نظر بگیریم داریم:

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

در نتیجه برای پیدا کردن معادله زوج - نیمسازها مانند زوج

نمایش زوج خط می شود که درمیان مذکور برابر صفر باشد.

فی الواقع بر طبق تئوری ماتریسی دستگاه معادلات دو خط حاصل حالت دوم:

(۲) $a = 0, b \neq 0$ بحث مشابه حالت ۱ می شود.

(۳) $a = 0, b = 0, h \neq 0$ آنگاه

$$S(x, y): hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$

برای تبدیل $S(x, y) = 0$ بر ضرب دو عبارت خطی چنین

عمل می کنیم:

$$hxy + 2gx + 2fy + c \equiv (x + p)(y + q)$$

$$p = f/h, \quad q = g/h, \quad p \cdot q = c/2h$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{f \cdot g}{h^2} = \frac{c}{2h} \Rightarrow ch - 2fg = 0$$

اما دقت بفرمایید که اگر $a = b = 0$ باشد، آنگاه

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = ch - 2fg$$

که نشان می دهد همان شرط $\Delta = 0$ اینجا نیز برقرار است.

از بحث سه حالت به این نتیجه می رسیم که $S(x, y) = 0$

وقتی یک زوج خط را نمایش می دهد که $\Delta = 0$ باشد.

(۳) بحث مشابه برای حالتی است که زوج خط، محل تلاقی

در مبدأ مختصات داشته باشند، که در اینجا ما به کمک معادلات

انتقال از $S(x, y) = 0$ به شکل کلی آنها $H(x, y) = 0$ می رسم.

یا از حاصل ضرب دو خط که از مبدأ می گذرند.

معادله دو خط که از مبدأ می گذرند

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

$$m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \quad (۱)$$

و به طور کلی

$$H(x, y): ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (۲)$$

که به آن معادله همگن درجه دوم می گویند. عکس مسأله بالا

نیز صادق است.

تمرین (۱): نشان دهید اگر قسمتی از عبارت $H(x, y)$ و

$$(y - mx) = k(y - mx) = k^2 \quad \text{ثالثاً:}$$

حال می توان به کمک عامل k^2 ، $S(x, y) = 0$ را تبدیل به همگن $H(x, y) = 0$ کرد.

$$(ax^2 + 2hxy + by^2)k^2 + (2gx + 2fy)k(y - mx) + c(y - mx)^2 = 0$$

معادله اخیر، همان زوج خط OA و OB است.

مسائل

(۱) ثابت کنید شرط اینکه زوج خط

$$S(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

موازی باشد این است که: $a/h = h/b = g/f$ ، آنگاه معادلات دو خط موازی را به دست آورید و نشان دهید فاصله بین آنها

خواهد شد $\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a^2 + h^2}}$ ، شیب زوج خط را محاسبه کنید.

(۲) نشان دهید سطح مثلث محدود به خط $px + qy - 1 = 0$ و زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ خواهد شد.

$$S = \sqrt{h^2 - ab} / (bp^2 - 2hpq + aq^2)$$

(۳) نشان دهید معادله زوج خطی که از مبدأ می گذرد و بر زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ عمود است $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ است.

(۴) اگر $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ معادله زوج خط OA و OB و معادله زوج خط OP و QQ به صورت $(a + \lambda)x^2 + 2hxy + (b + \lambda)y^2 = 0$ باشد، نشان دهید $\angle AOP = \angle BOQ$

(۵) ثابت کنید معادله زوج خطی که از مبدأ می گذرد و با خط $lx + my + n = 0$ مثلث متساوی الاضلاع می سازد، $(l^2 - 3m^2)x^2 + 4lmxy + (m^2 - 3l^2)y^2 = 0$ می باشد.

(۶) نشان دهید شرط اینکه یکی از خطوط زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ بر یکی از خطوط زوج خط $lx^2 + 2mxy + hy^2 = 0$ عمود باشد، آن است که:

$$4(hm + ma)(mb + nl) = (al - bn)^2$$

(۷) ثابت کنید اگر دو زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ و $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ در یک خط مشترک باشند، آنگاه

خط عمل می کنیم:

$$\left[\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} + \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}} \right] \left[\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} - \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}} \right] = 0$$

پس از ساده کردن

$$(m_1 + m_2)x^2 - 2(1 - m_1 m_2)xy - (m_1 + m_2)y^2 = 0$$

عبارت $m_1 - m_2$ که در محاسبات ظاهر می شود، صفر نیست، زیرا در این صورت زوج خط $H(x, y) = 0$ بر هم منطبق می شوند. زیرا اگر $m_1 - m_2 = 0$ آنگاه $y - m_1 x = 0$ و $y - m_2 x = 0$ بر هم منطبق می شوند.

معادله اخیر با جایگذاری $m_1 + m_2$ و $m_1 \times m_2$ ، از قبل می شود:

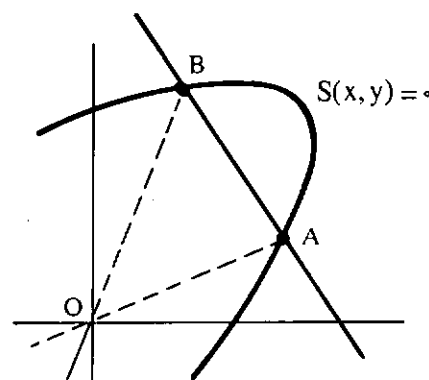
$$-\frac{2h}{b}x^2 - 2\left(1 - \frac{a}{b}\right)xy - \left(-\frac{2h}{b}\right)y^2 = 0$$

و بالاخره: معادله زوج - نیمساز می شود:

$$\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{a - b}{h}$$

(۵) با توجه به شکل روبرو اگر معادله خط AB به صورت

$y = mx + k$ باشد، آنگاه یک روش برای به دست آوردن زوج خط OA و OB چنین است:



اولاً: A, B محل تلاقی دو خط OA و OB با $S(x, y) = 0$

هستند.

ثانیاً: مرکز معادله همگن $H(x, y) = 0$ یک زوج خط مبدأ مختصات است.