



بی نهایت

● پرویز شهریاری

با دو برابر کردنهای متوالی تعداد ضلعها، خود را به ۹۶ ضلعی های منتظم محاطی و محیطی می رساند. قطر دایره را برابر واحد می گیرد و ثابت می کند، در این حالت، محیط ۹۶ ضلعی محاطی بیشتر از $3\frac{1}{7}$ و محیط ۹۶ ضلعی محیطی کمتر از $3\frac{1}{7}$ است، یعنی

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{1}{6}$$

به این ترتیب، عدد $\frac{22}{7}$ را، به عنوان تقریب خوبی برای عدد π می پذیرد.

ارشمیدس که در رساله «درباره اندازه گیری دایره»، به محاسبه محیط و مساحت دایره پرداخته است، در رساله دیگر خود به نام «درباره کره و استوانه»، به حالت فضایی، یعنی سطح و حجم کره توجه می کند و، با استفاده از همان روش خود، ثابت می کند: سطح کره برابر است با چهار برابر سطح دایره عظیمه و حجم کره، برابر است با چهار برابر حجم مخروطی که قاعده آن، دایره عظیمه ای از کره و ارتفاع آن برابر طول شعاع کره باشد.

ارشمیدس، در همین رساله، نتیجه های مهم و جالب دیگری هم به دست آورده است. به طور مثال ثابت می کند، اگر در یک استوانه متساوی الساقین (استوانه ای که، در آن، طول ارتفاع با طول قطر قاعده برابر باشد)، کره ای محاط کنیم، سطح کل و حجم استوانه، برابر $\frac{4}{3}$ سطح و حجم کره می شود.

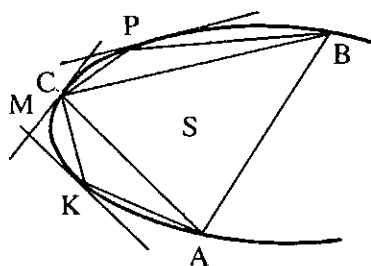
ارشمیدس در رساله «درباره کونوئیدها و سغه روئیدها»، از روشی استفاده می کند که خیلی نزدیک به روش انتگرال گیری

«بی نهایت»، به معنای ساده خود در ریاضیات، یعنی بزرگتر از هر عددی؛ ولی خود بی نهایت، یک عدد نیست، یک مفهوم است و بیشتر، معرف یک کیفیت است تا کمیتی مشخص. به همین دلیل است که، تا مدت ها، ریاضی دانان وارد در چند و چون بی نهایت نمی شدند و از کنار آن می گذشتند. وقتی زنون، ریاضی دان یونانی، برای اثبات یک پارچگی جهان و نبودن حرکت در آن، با درکی ساده اندیشانه از «بی نهایت» استفاده کرد، هراس ریاضی دانان یونانی را از بی نهایت، بیشتر کرد، چرا که می دیدند، با سوء استفاده از آن، می توان حقیقت را وارونه جلوه داد.

تنها ریاضی دان دنیای کهن، که، برخلاف تفکر رایج زمان خود بی نهایت را، به مفهوم ریاضی آن (چه بی نهایت کوچک و چه بی نهایت بزرگ) بررسی کرد ارشمیدس بود. ارشمیدس، در نوشته های خود، از روشی استفاده می کند که، دو هزار سال بعد از او، منجر به کشف محاسبه انتگرالی شد.

ساده ترین کاربرد این روش را در رساله «درباره اندازه گیری دایره» می بینیم. ارشمیدس در این رساله، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مسأله اندازه گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد بی (π) را مطرح می کند و، در ضمن، میزان خطای موجود را، در هر مرحله از محاسبه، به دست می دهد. ارشمیدس، با محاسبه محیط چند ضلعی های منتظم محاطی و محیطی، از دو سمت به محیط دایره نزدیک می شود. او از مثلث متساوی الاضلاع محاطی و محیطی آغاز می کند و، سپس،

محاسبه کنیم (شکل ۲).



(شکل ۲)

استدلال ارشمیدس چنین است. مماسی موازی وتر AB بر سهمی رسم و نقطه تماس C را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. مساحت مثلث ABC، از نصف مساحت قطعه سهمی AMB بیشتر است. در قطعه‌های تازه AKC و CPB، شبیه آن‌چه درباره قطعه AMB انجام دادیم، عمل می‌کنیم، یعنی مثلث‌های AKC و CPB را می‌سازیم. شکل محاطی AKCPB به دست می‌آید. این روش بناختن مثلث‌ها را ادامه می‌دهیم، چندضلعی محاطی، همراه با مساحت آن، مرتب بزرگتر و، مساحت آن، به مساحت قطعه سهمی نزدیکتر می‌شود. ارشمیدس ثابت کرد، مساحت مثلث ACB، چهار برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث AKC و CPB است و از آن جا که، همین وضع، برای مثلث‌های بعدی پیتس می‌آید، و با توجه به این که، مجموع مساحت‌های همه این مثلث‌ها، به مساحت قطعه سهمی نزدیک است، اگر مساحت مثلث ACB را S بنامیم، مساحت قطعه سهمی چنین می‌شود:

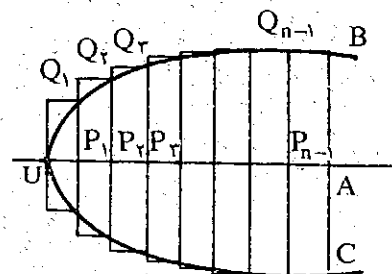
$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{64}S + \dots$$

ارشمیدس از «روح زمان» پیروی نکرد و سنتها را درهم شکست و راه درست بررسی را در محاسبه مجموع جمله‌های یک «رشته بی‌پایان» نشان داد. در واقع ارشمیدس، از همان رهنمودی پیروی می‌کرد که سده‌های بعد، به وسیله دکارت تنظیم شد:

«وقتی می‌خواهیم موضوعی را بررسی کنیم، نباید در جست‌وجوی چیزی باشیم که دیگران می‌اندیشند و یا در گمان خودمان وجود دارد. باید چیزی را جست‌وجو کنیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و یا با استدلال قیاسی قابل اثبات است، چرا که دانش، از راه دیگری به دست نمی‌آید.»

تزدیک به دو هزار سال طول کشید تا ریاضی دانان توانستند راه ارشمیدس را دنبال کنند: «بی‌نهایت» را به رسمیت بشناسند

است. او به جسم‌هایی «کونوئید» می‌گفت که از دوران یک قطعه سهمی، دور محور خود به دست آیند، یعنی همان چیزی که امروز سهموی (پارابولوئید) نامیده می‌شود. باید گفت که، ناهمگذاری ارشمیدس از نامگذاری امروز ما بهتر است، زیرا «پارابولوئید» یعنی «شبه سهمی»، در حالی که یک حجم را نمی‌توان شبیه یک شکل مسطح دانست؛ ولی «کونوئید» یعنی «شبه مخروط». در واقع هم، جسم حاصل، به مخروط شباهت دارد.



(شکل ۱)

روش ارشمیدس را، برای پیدا کردن حجم کونوئیدی که، از دوران قطعه سهمی BOC دور محور OA، به دست می‌آید، می‌توان به این ترتیب شرح داد (شکل ۱) ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به بخش‌های برابر $Q_1P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}A$ تقسیم می‌کنیم. از نقطه‌های تقسیم، که تعداد آن‌ها برابر n است، عمودهای $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots, P_{n-1}Q_{n-1}$ را رسم می‌کنیم و آن‌طور که در شکل دیده می‌شود، مستطیل‌های محاطی و محیطی را می‌سازیم. اگر شکل را دور OA دوران دهیم، دو جسم پله‌ای به دست می‌آید که از استوانه‌های محاط در کونوئید و محیط بر آن به دست آمده‌اند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم کونوئید و حجم جسم درونی کمتر از حجم کونوئید است، ارشمیدس، با آغاز از حجم این دو جسم، حجم کونوئید را به دست می‌آورد و، با زیاد کردن تعداد تقسیم‌ها (یعنی با میل n به سمت بی‌نهایت)، ثابت می‌کند، این حجم، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر OA و شعاع قاعده آن برابر AB باشند.

ارشمیدس، در رساله «تربیع سهمی» (ساختن مربعی که مساحت آن، برابر با مساحت سهمی مفروض باشد)، از همین روش استفاده می‌کند. این رساله، به محاسبه یک قطعه سهمی اختصاص دارد. فرض کنید، بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را، که به وسیله وتر AB از سهمی جدا شده است،

و، به جای فرار از آن، آن را به خدمت دانش درآورند. فرانسوا ویت، ریاضی‌دان فرانسوی سده شانزدهم، حاصل ضرب بی‌پایان زیر را، برای محاسبه عدد π پیشنهاد کرد:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \times \dots = \frac{\pi}{2}$$

و والیس، ریاضی‌دان انگلیسی سده هفدهم، این ضرب بی‌پایان را:

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots = \frac{\pi}{2}$$

در رابطه والیس، به این نکته خالب توجه کنید که از ضرب عددهای گویا، وقتی تعداد آن‌ها بی‌نهایت است، ممکن است عدد گنگ (و در این جا «غیر جبری») به دست آید، چیزی که هرگز برای ضرب تعداد محدودی عدد گویا، پیش نمی‌آید.

سرانجام، نیوتون و لایب‌نیتس، با کشف محاسبه دیفرانسیلی و انتگرالی و به خدمت گرفتن «بی‌نهایت کوچک‌ها» و «بی‌نهایت بزرگ‌ها»، دگرگونی عظیمی در پیشرفت ریاضیات، و به دنبال آن در همهٔ دانش‌ها، به وجود آوردند.

این را هم نگفته نگذاریم که هگل، فیلسوف آلمانی، برای نخستین بار، مفهوم فلسفی بی‌نهایت را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و بستگی ذاتی «بی‌نهایت» را با «نهایت» و «نامحدود» را با «محدود» نشان داد.



بی‌نهایت، یکی از ویژگی‌های فضا و زمان است و می‌توان آن را به یاری ریاضیات و کیهان‌شناسی مورد بررسی قرار داد. تا آن جا که دانش امروز نشان می‌دهد، جهان مادی، که به عنوان پراکندگی جرم در فضا و زمان شناخته می‌شود، نامحدود است. البته، بسته به دستگاهی که برای محاسبه انتخاب می‌شود، می‌توان «فضا - زمان» را منتهای یا نامتناهی در نظر گرفت. بی‌نهایت، بازتابی از واقعیت است و، بنابراین، با تکیه بر واقعیت، می‌توان آن را درک و تحلیل کرد.

مفهوم «بی‌نهایت» ریاضی، تنها وقتی قابل درک است که آن را، در وحدت منطقی با «نهایت» مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین، «بی‌نهایت» در ذات خود متضاد است و از بین بردن این تضاد، یعنی نفی بی‌نهایت. ولی، از طرف دیگر، می‌دانیم، در هر نظریه ریاضی، بی‌تناقضی در رابطه‌های صوری مربوط به آن، از ضروریات است. چگونه می‌توان، ضرورت بی‌تناقضی را

با ویژگی متناقض بی‌نهایت آشتی داد؟ در واقع، وقتی مثلاً در نظریه حد، از حد بی‌نهایت ($a_n = \infty$ حد) و یا در نظریه مجموعه‌ها از توان بی‌نهایت صحبت می‌کنیم، تنها به این دلیل، دچار تناقض نمی‌شویم که، این‌ها، تنها صورت‌های ویژهٔ کاملاً ساده شده‌ای از مفهوم بی‌نهایت‌اند و تنها طرحی، تصویری و جنبه‌ای از مفهوم بی‌نهایت جهان واقعی را بازتاب می‌دهند.



بی‌نهایت، یعنی بزرگتر از هر عدد دلخواه و، بنابراین، در همان حال که با مفهوم «کمیت» و «عدد» بستگی دارد، نمی‌توان آن را یک عدد به حساب آورد. از همین جاست که قانون‌های مربوط به عمل، در حالتی که با مجموع یا حاصل ضرب بی‌نهایت جمله سرو کار داریم، همیشه با قانون‌های دربارهٔ جمع و ضرب عادی تطبیق نمی‌کند. قانون‌های عمل، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، در همان حال که با استدلال‌های قیاسی به دست می‌آیند، باید با تجربه و با قانونمندی‌های حاکم بر طبیعت هم سازگار باشند. به این دو مثال توجه کنید:

دو متحرک A و B را در نظر می‌گیریم که به فاصلهٔ a متر از یکدیگر قرار دارند و هر دو، در یک لحظه، به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند: A با سرعت ۲ متر در ثانیه و B با سرعت ۱ متر در ثانیه. هر بار که A و B به هم می‌رسند، A بلافاصله به طرف مبدأ حرکت خود برمی‌گردد و با رسیدن به آن، دوباره به طرف B می‌رود. این گونه رفت و آمد A، آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا B، تمامی فاصلهٔ a متر را پیماید. می‌خواهیم بدانیم، A چند متر راه رفته است.

راه حل بسیار ساده است. سرعت A سه برابر سرعت B است و، بنابراین، اگر در تمام مدت حرکت B، در راه باشد، مسافتی به اندازهٔ سه برابر B می‌پیماید. B، به اندازهٔ a متر راه رفته است. در نتیجه، مسافتی که A پیموده، برابر است با ۳a متر.

ولی اگر مسأله را، مرحله به مرحله حل کنیم و ببینیم، متحرک A در هر رفت و برگشت چند متر پیموده است و، از مجموع آن‌ها، مسافتی را پیدا کنیم که A پیموده است، به مجموع بی‌پایان زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{3a}{4} + \frac{3a}{4}\right) + \left(\frac{3a}{8} + \frac{3a}{8}\right) + \left(\frac{3a}{16} + \frac{3a}{16}\right) + \dots = 2\left(\frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \frac{3a}{16} + \dots\right) =$$

حکومت می کند، کل و جزء را این طور تعریف می کنند:

«کل آن است که شامل همه جزء های خود باشد».

«جزء آن است که بخشی از کل را شامل شود».

ولی زررکانتور، مبتکر نظریه مجموعه ها، روشن کرد که اصل اقلیدس، در قلمرو بی نهایت ها، همیشه و همه جا درست نیست. به عنوان نمونه، مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای فرد طبیعی را در نظر می گیریم. روشن است که عددهای فرد طبیعی، بخشی (یا به زبان ریاضی: زیرمجموعه ای) از مجموعه عددهای طبیعی است. ولی آیا تعداد عددهای فرد طبیعی، از تعداد همه عددهای طبیعی، کمتر است؟ عددهای فرد طبیعی را در یک سطر و عددهای طبیعی را زیر آن ها می نویسیم:

۱ ۳ ۵ ۷ ۹ ... $2n+1$...

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ... $n+1$...

در برابر هر عدد فرد، یک عدد طبیعی و در برابر هر عدد طبیعی، یک عدد فرد وجود دارد و، اگر به زبان کانتور بگوییم، بین عددهای فرد طبیعی و همه عددهای طبیعی، تناظر یک به یک برقرار است. به طور مثال عدد فرد ۱۳۷۵، متناظر با عدد طبیعی ۶۸۷ و عدد طبیعی ۹۹۸ متناظر با عدد فرد ۱۹۹۷ است. به این ترتیب، تعداد عددهای فرد، نه کمتر از تعداد عددهای طبیعی است و نه بیشتر از آن. کل با جزء خود برابر شد. می بینیم، وقتی گام به قلمرو بی نهایت ها می گذاریم، یک «اصل بدیهی» هم می تواند قدرت قانونی خود را از دست بدهد. شاید بتوان، این اصل را، به صورت زیر کامل کرد: «کل محدود، از هر جزء خود بزرگتر است» و، البته، اگر با کل نامحدود سر و کار داشته باشیم، ممکن است از جزء خود بزرگتر نباشد.

در جمع عددهای گویا، به شرطی که هم جمله های جمع و هم مجموع آنها را، کسرهای ساده نشدنی در نظر بگیریم، در مخرج کسر حاصل جمع، نمی تواند عاملی تازه، غیر از عامل هایی که در مخرج جمله های جمع وجود دارد، پدیدار شود. برای مثال از جمع $\frac{1}{3}$ با $\frac{1}{5}$ ، نمی توان به کسری ساده نشدنی رسید که، در مخرج آن، عاملی غیر از ۳ و ۵ وجود داشته باشد. ولی به این مجموع بی پایان توجه کنید:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \frac{1}{4}$$

در مخرج های جمله های جمع، تنها عامل ۵ وجود دارد، در حالی که در مخرج کسر حاصل جمع، عامل ۲ ظاهر شده

$$= \frac{3a}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{3a}{4} \times 2 = 3a$$

و این، همان پاسخی است که در آغاز و به سادگی به دست آورده بودیم. واقعیت و عمل، درستی حد مجموع جمله های تصاعد هندسی نزولی بی پایان را تأیید می کند:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

مثال دوم: قیمت هر چهار بطری خالی شیر را، برابر با قیمت یک بطری پر از شیر فرض می کنیم. می خواهیم بدانیم، با پولی که برای ۱۲ بطری پر از شیر می پردازیم، چقدر شیر (بدون بطری) می توانیم داشته باشیم؟

۱۲ بطری شیر را در ظرفی خالی می کنیم، شیشه های خالی را به فروشگاه می دهیم و ۳ بطری پر از شیر می گیریم. اگر ۳ بطری خالی را پس بدهید، باید $\frac{3}{4}$ بطری پر به شما بدهند (فرض را بر عملی بودن این دادوستد می گیریم). با پس دادن $\frac{3}{4}$ بطری خالی، $\frac{3}{4}$ بطری پر می گیرید و غیره. اگر واحد اندازه گیری مقدار شیری را که در اختیار شماست، یک بطری بگیریم، مقدار آن چنین خواهد شد:

$$12 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots = 15 + 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) = 15 + 3 \times \frac{1}{3} = 15 + 1 = 16$$

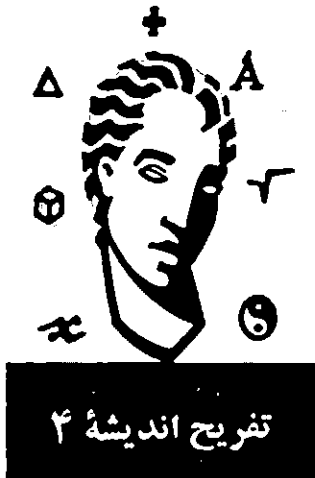
ولی شما می توانید به ترتیب دیگری استدلال و مسأله را، به صورتی حل کنید که، در عمل، ممکن است: در مرحله اول ۱۲ بطری خالی را با سه بطری پر عوض می کنید. در مرحله دوم، یک بطری پر از فروشگاه به امانت می گیرید، آن را در ظرف خود خالی می کنید و همراه با سه بطری خالی قبلی (که اکنون روی هم ۴ بطری خالی شده اند)، وام خود را به فروشگاه می پردازید (ارزش ۴ بطری خالی، با ارزش یک بطری پر برابر است). به این ترتیب، شما به اندازه

$$12 + 3 + 1 = 16$$

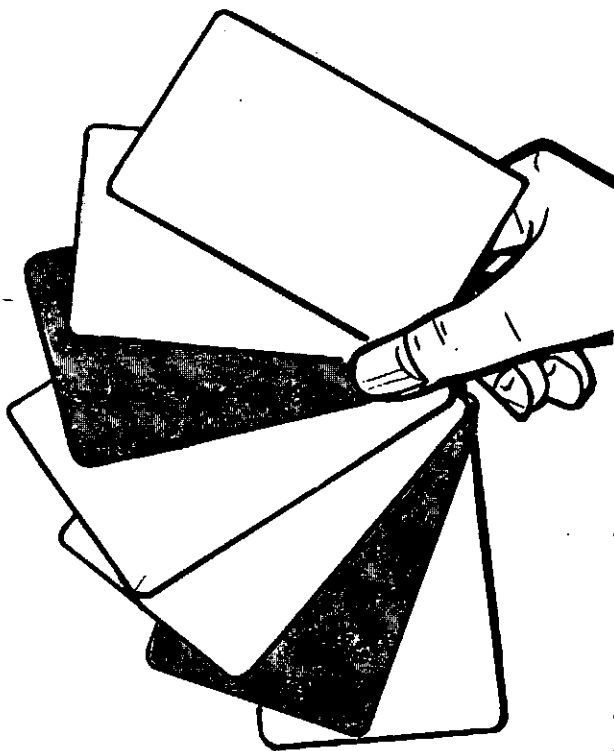
بطری شیر در اختیار دارید. و این، همان پاسخ قبلی است. باز هم واقعیت و عمل، نظریه ریاضی را تأیید کرد.



اقلیدس، در «مقدمات» مشهور خود، این اصل را، به عنوان حکمی بدیهی پذیرفته است: «کل از هر جزء خود بزرگتر است». در منطق ارسطویی که هنوز هم بر منطق کلاسیک



علی تعداد زیادی کارت رنگی در اختیار دارد. هر رنگ با شماره‌ای مشخص می‌شود، بدین ترتیب که: رنگ زرد، ۲؛ رنگ آبی، ۵؛ رنگ سرخ، ۳؛ رنگ بنفش، ۷. سعید مقداری از کارت‌ها را جدا کرد. حاصلضرب شماره کارت‌ها ۷۰۵۶۰ شد. از هر رنگ به چه تعداد انتخاب کرده است؟



جواب در صفحه ۸۶

است.

در مجموع‌های محدود، با تغییر گروه‌بندی عددها، تغییری در حاصل جمع پدید نمی‌آید. برای مثال

$$1+2+3+5=1+(2+3+5)=(1+2)+(3+5)=11$$

در حالی که، در مجموع‌های بی‌پایان، ممکن است تغییر گروه‌بندی جمله‌ها، منجر به تغییر مقدار مجموع شود. مجموع $S=1-1+1-1+\dots$

را در ریاضیات نامعین می‌دانند (به اصطلاح ریاضی، رشته‌ای واگرا یا متباعد است، یعنی مجموع جمله‌های آن، به سمت هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود). ولی اگر از قانون‌های عادی استفاده کنیم، می‌توانیم این طور بنویسیم:

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0$$

و یا این طور

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots=1$$

و یا سرانجام

$$S=1-(1-1+1-1+\dots)=1-S$$

که از آن جا به دست می‌آید: $S=\frac{1}{2}$ (شگفتا! از مجموع عددهای درست، عددی کسری حاصل می‌شود).

در این جا، برخی از ساده‌ترین جنبه‌های مربوط به «بی‌نهایت» را، در مرزهایی که از ساده‌ترین و مقدماتی‌ترین روش‌های ریاضی خارج نشویم، فهرست‌وار بررسی کردیم. والا، «بحث مربوط به بی‌نهایت»، همچون خود «بی‌نهایت» پایانی ندارد.

نماد « ∞ » برای «بی‌نهایت»، برای نخستین بار در سال ۱۶۵۵ میلادی در نوشته‌های جون والیس (۱۶۱۶ - ۱۷۰۳ میلادی)، ریاضی‌دان انگلیسی و به ویژه در کتاب «حساب بی‌نهایت» او به کار رفت و از آن پس به تدریج همگانی شد.

