

بی نهایت

ساده، کلکسیونی از

اشیاست). برای مثال:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

به معنی مجموعه‌ی اعداد تمام (مثبت) است. هنگامی که مجموعه‌ای داشته باشیم، می‌توانیم درباره‌ی زیرمجموعه‌هایی^۱ که داخل مجموعه‌ی بزرگ‌ترند، صحبت کنیم. واضح‌ترین زیرمجموعه‌هایی که با مثال N مان مرتبط‌اند، زیرمجموعه‌های

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ و } E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

هستند که به ترتیب، مجموعه‌های اعداد فرد^۲ و اعداد زوج^۳ را تشکیل می‌دهند. در این جا، اگر این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد فرد با تعداد اعداد زوج برابر است؟» پاسخمان چیست؟ گرچه این کار را نمی‌توان با شمردن اعضای که در هر مجموعه موجود است، و مقایسه‌ی جواب‌ها انجام داد، پاسخ به طور مطمئن «آری» است. اما این اطمینان بر چه مبنایی است؟ شاید بر چیزی شبیه این: «نیمی از اعداد تمام فرد و نیمی زوج هستند.» کانتور با این پاسخ موافق است، اما استدلال متفاوتی به دست می‌دهد. وی چنین می‌گوید: هر بار که عددی فرد داریم، عدد زوجی در کنارش، به عنوان «جفت»^۴ خواهیم داشت. این ایده که هر دو مجموعه‌ی O و E دارای اعضای با تعداد یکسان‌اند، بر مبنای جفت کردن هر عدد فرد با یک عدد زوج قرار دارد:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} O: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ E: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & \dots \end{array}$$

اما در صورتی که این پرسش دیگر را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد تمام، برابر تعداد اعداد زوج است؟» پاسخ ممکن

بزرگی بی نهایت چه قدر

است؟ پاسخ کوتاه به این پرسش این است که ∞ (نماد بی نهایت) بسیار بزرگ است. خط مستقیمی را با اعداد بزرگ‌تر و بزرگ‌تر واقع بر امتداد آن، در حالی که تا «بی نهایت» امتداد یافته است تصور کنید. در این مورد، به ازای هر عدد بسیار بزرگی که در نظر گرفته شود، مثلاً، 10^{1000} ، همواره عددی بزرگ‌تر از آن، چون $10^{1000} + 1$ موجود است.

در مفهوم سستی، بی نهایت عددی است که تا ابد ادامه دارد. ریاضیات، بی نهایت را همه جا به کار می‌برد، اما باید توجه داشت که آن را مانند عددی معمولی در نظر نگیریم، چرا که عددی معمولی نیست.

شمارش

ژرژ کانتور^۱ ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم کاملاً متفاوتی از بی نهایت به دستمان داده است. در این فرایند، وی دست تنها نظریه‌ای آفرید که بیش‌تر ریاضیات مدرن را به جلو رانده است. مفهومی که نظریه‌ی کانتور وابسته به آن است، با مفهوم ابتدایی شمارش سروکار دارد؛ یعنی ساده‌تر از آن‌چه که در زندگی روزمره مان به کار می‌بریم.

کشاورزی را در نظر می‌گیریم که در مورد شمارش با اعداد چیزی نمی‌داند. پس چگونه خواهد دانست چند گوسفند دارد؟ خیلی ساده، هنگامی که صبح گوسفندان را به چرای می‌برد، می‌تواند عصر با جفت کردن هر گوسفند با سنگی از توده‌ای که از صبح در مدخل طویله موجود است، بگوید آیا همه‌ی گوسفندان برگشته‌اند یا خیر. چه اگر گوسفندی گم شده باشد، سنگی باقی می‌ماند. به این ترتیب، کشاورز زمان، حتی بدون استفاده از اعداد، ریاضی ورز بوده است. چرا که وی مفهوم تناظر یک به یک^۲ را بین گوسفندان و سنگ‌ها به کار برده است. این مفهوم، ابتدایی است، اما پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

نظریه‌ی کانتور با مجموعه‌ها^۳ سروکار

دارد (مجموعه، به طور

به این ترتیب، اصلیت، قدر یا «اندازه‌ی» یک مجموعه است. کانتور در مورد اعداد تمام N ، و هر مجموعه‌ی در تناظر یک به یک با N ، از نماد $\sim$ استفاده کرد. بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت

$$\text{card}(N) = \text{card}(O) = \text{card}(E) = \aleph_0$$

هر مجموعه که بتواند در تناظر یک به یک با N قرار گیرد، مجموعه‌ی «بی‌نهایت شمارا» یا «نامتناهی شمارا»^{۱۱} نامیده می‌شود. بی‌نهایت-شمارا بودن یک مجموعه به این معنی است که می‌توانیم اعضای آن مجموعه را در یک فهرست قرار دهیم. برای مثال، فهرست اعداد فرد، به طور ساده عبارت است از ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... و می‌دانیم کدام عضو اول، کدام دوم، و غیره است.

آیا کسرها بی‌نهایت - شمارا هستند؟

مجموعه‌ی کسرها یا Q ، به این معنی که می‌توان N را به عنوان زیر مجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جميع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسرهای منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به نظر می‌رسد این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظر یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد.

۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	...
$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

است خیر

باشد، و استدلال این‌که

مجموعه‌ی N ، به خودی خود، دو برابر مجموعه‌ی اعداد زوج عدد دارد.

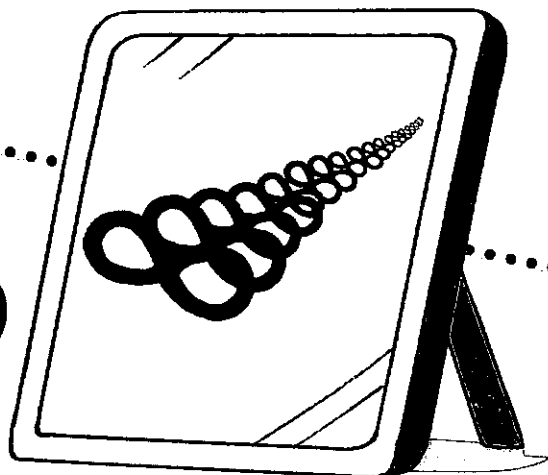
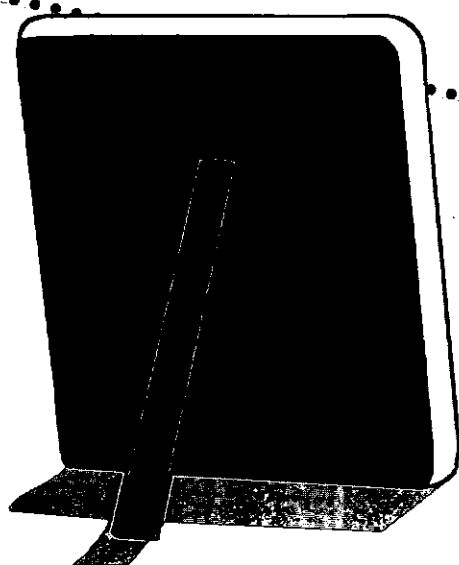
مفهوم «بیشتر»، زمانی که با مجموعه‌هایی با تعداد اعضای نامعین سروکار داریم، مفهومی مبهم است. اما این کار را می‌توانیم با مفهوم تناظر یک به یک بهتر انجام دهیم. تعجب‌آور است که بین N و مجموعه‌ی اعداد زوج (E)، نیز تناظری یک به یک موجود است:

O:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱...
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
E:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲...

به این ترتیب، به این نتیجه‌ی مبهوت‌کننده می‌رسیم که به «همان تعداد» اعداد تمام، عدد زوج داریم! نتیجه‌ای که با «مفهوم متعارف» اعلام شده توسط یونانیان باستان، در تناقض است؛ چه آغاز کتاب مقدمات^{۱۲} اقلیدس اسکندرانی^{۱۳} بر این است که «کل بزرگ‌تر از جزء است».

اصلیت

تعداد اعضای یک مجموعه، به «اصلیت» یا عدد اصلی آن موسوم است. در حالت مربوط به گوسفندان، عدد اصلی ثبت شده به حساب کشاورز ۴۲ است. اصلیت مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ برابر ۵ است که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

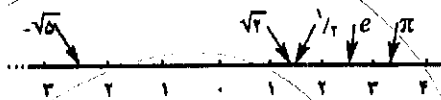
$$\text{card}\{a, b, c, d, e\} = 5$$


که از

پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است و برعکس، موقعیتش «جفتش» را در فهرست دو بعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی کسرها Q بی‌نهایت شماراست و نوشت: $\text{card}(Q) = \aleph_0$.

فهرست کردن اعداد حقیقی

در حالی که مجموعه‌ی کسرها جوابگوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، بعضی اعداد حقیقی از قبیل $\sqrt{2}$ و e ، π نیز موجودند که کسر نیستند. این اعداد گنگ هستند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عدد حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعه‌ی R ، بارخنه‌های پر شده، به عنوان «پوستار»^{۱۳} رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از اعداد حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن اعداد حقیقی بین 0° و 1° در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک به صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند، چرا که در واقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از اعداد را یکی پس از دیگری نوشت.

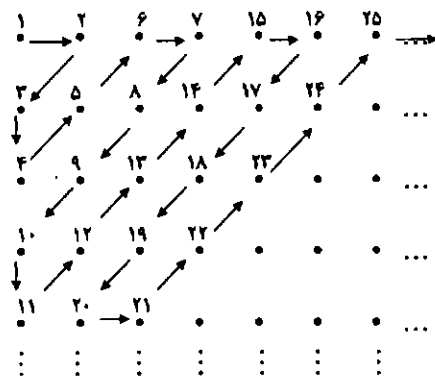
فرض می‌کنیم که به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین 0° و 1° را می‌توان به صورت یک دهدهی گسترش یابنده، مثلاً:

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830988618379067153\dots$$

و

$$\frac{1}{4} = 0.25000000000000000000\dots$$

طریق آغاز این کار، مجسم کردن عبارات دو بعدی است. برای شروع، ردیفی از جمیع اعداد تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس در زیر آن، جمیع کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است، اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند $\frac{2}{2} = 1$) می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر، آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم. کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، $\frac{209}{67}$ در ردیف ۱۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست $\frac{1}{67}$ قرار دارد.



با نمایش جمیع کسرها در این طریق، دست کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک بعدی بنا کنیم. در صورتی که از سطر بالایی شروع و در هر مرحله به راست حرکت کنیم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پریپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به صورت زیر آغاز می‌شود:

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2$$

بیان کرد، پس

باید به کانتور بگویید: «بفرماید، این فهرست

من از جمیع اعداد بین ۰ و ۱ است»؛ فهرستی که آن را

$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ می نامیم. چه، در صورتی که نتوانید چنین

کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستان نگاه می کند و اعداد واقع

در قطر مشخص شده را با حرف سیاه علامت می زند:

$$r_1: 0/a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$r_2: 0/b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

$$r_3: 0/c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$$

$$r_4: 0/d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$$

اما عدد $x = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$ که در آن x_1 متفاوت از a_1

x_1 متفاوت از b_1 ، x_2

متفاوت از c_1 ، و به همین گونه در امتداد قطر است

کجاست؟ عدد یکسوی از هر عدد واقع در فهرستان در یک

مکان دهدهی تفاوت دارد و لذا نمی تواند در این فهرست باشد.

پس حق با کانتور است.

در واقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعه ی اعداد حقیقی

R ممکن نیست و بنابراین R مجموعه ی نامتناهی «بزرگ تر»ی

از مجموعه ی نامتناهی کسره های Q است. یعنی مجموعه ای با

مرتبه ی نامتناهی بالاتر.

پیشتر، ژرژ ژیرار دزارگ (Girard Desargues) (۱۵۹۵-۱۶۳۹ میلادی) از بنیانگذاران هندسه مدرن است.

ژرژ ژیرار دزارگ (Girard Desargues) (۱۵۹۵-۱۶۳۹ میلادی) از بنیانگذاران هندسه مدرن است.

۱۶۳۹ میلادی: ژیرار دزارگ "Girard Desargues" مفهوم نامتناهی را در هندسه معرفی می کند.

۱۸۵۵ میلادی: جان والیس (John Wallis) از بنیانگذاران هندسه مدرن است. "love knot" نامی که به یک گره (knot) می گویند را در مورد نامتناهی به کار می برد.

۱۸۷۴ میلادی: کانتور با مشخص کردن مرتبه های متفاوت نامتناهی، مفهوم نامتناهی را به دقت بررسی می کند.

۱۹۰۵ میلادی: آبراهام روبینسون (Abraham Robinson) بنیانگذار نظریه ی اشیاء نامتناهی است. "infinitesimal" نامی که به یک اشیاء نامتناهی می گویند را در مورد نامتناهی به کار می برد.

- پی نوشت:
1. Georg Cantor
 2. one to one correspondence
 3. sets
 4. subsets
 5. odd numbers
 6. even numbers
 7. mate
 8. Elements
 9. Euclid of Alexandria
 10. cardinality
 11. $\aleph_1$ یا «الف» از الفبای عبری است؛ نماد $\aleph_0$ به صورت «الف صفر» "aleph nought" خوانده می شود.
 12. countably infinite
 13. continuum