

فیثاغورس در جزیره ساموس، نزدیک کرانه‌های ایونی، زاده شد. او در عهد قبل از ارشمیدس، زنون و اودوکس (۵۶۹ تا ۵۰۰ پیش از میلاد) می‌زیست. او در جوانی به سفرهای زیادی رفت و این امکان را پیدا کرد تا با کاهنان مصر، بابل و مغان ایرانی آشنا شود و دانش آن‌ها را بیاموزد. به طوری که معروف است فیثاغورس، دانش مغان را آموخت. او روی هم رفته، ۲۲ سال در سرزمین‌های خارج از یونان بود و چون از سوی پولوکراتوس، شاه یونان، به آمازیس، فرعون مصر سفارش شده بود، توانست به سادگی به رازهای کاهنان مصری دست یابد. او مدت‌ها در این کشور به سر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و آگاهی‌ها و باورهای بسیار کسب کرد و از آن‌جا روانه بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز کرد.

وقتی او در حدود سال ۵۳۰، از مصر بازگشت، در زادگاه خود مکتب اخوتی (که امروزه برچسب مکتب فیثاغورس بر آن خورده است) را بنیان گذاشت. هدف او از بنیان نهادن این مکتب این بود که بتواند مطالب عالی ریاضیات و مطالبی را تحت عنوان نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی تدریس کند و پیشرفت دهد. فیثاغورس نیز به مانند سقراط جانب احتیاط را نگاه داشت و چیزی ننوشت. تعلیم وی از طریق شاگردانش به دست ما رسیده است.

شیوه تفکر این مکتب با سنت قدیمی دموکراسی، که در آن زمان بر ساموس حاکم بود، متضاد بود. و چون این مشرب فلسفی بامذاق مردم ساموس خوش نیامد، فیثاغورس به ناچار، زادگاهش را ترک گفت و به سمت شبه‌جزیره آپنین (از سرزمین‌های وابسته به یونان) رفت و در

آمده است که متعصبان آیینی و سیاسی، توده‌های مردم را علیه او شوراندند که وی راهنمای ایشان کرده بود مکتب و معبد او را آتش زدند و وی در جان سپرد.

ریاضی خویش را با موضوعات فلسفی و باورهای آیینی درهم در عین حال هم عارف و هم ریاضیدان بود و به قولی شهرت او نتیجه نبوغ وی و مابقی ماحصل ارشاد و اوست.

در افسانه‌ها چنین و به ازای نور هدایتی میان شعله‌های آتش وی نظرات آمیخته بود. او یک دهم رسالت

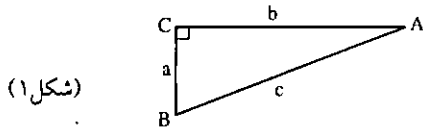


بلندای خویش

mir_sadr@yahoo.com

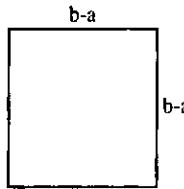
میر سدرام صدر

روش عملی اول. برای بررسی درستی قضیه فیثاغورس با روش عملی مراحل زیر را انجام می‌دهیم.
مرحله ی اول: مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های a، b و $c > b > a$ در نظر می‌گیریم (شکل ۱).



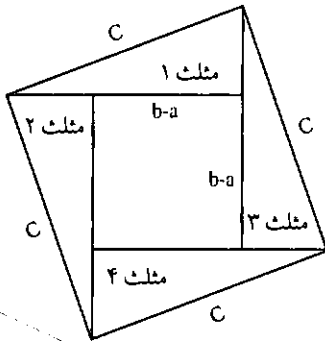
(شکل ۱)

مرحله ی دوم: مربعی به طول $b-a$ به صورت زیر را رسم می‌کنیم:



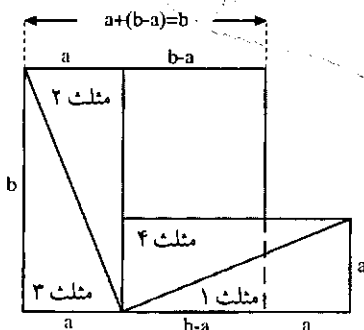
(شکل ۲)

مرحله ی سوم: چهار مثلث مانند $\triangle ABC$ در شکل ۱ را در چهار طرف ضلع های این مربع به صورت زیر قرار می‌دهیم. (شکل ۳)



(شکل ۳)

همان طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌کنید، مربعی به ضلع c به وجود می‌آید که مساحت آن برابر با $S = c^2$ است.
مرحله ی چهارم: اکنون می‌خواهیم مساحت شکل ۳ را به روش دیگری محاسبه کنیم، برای این منظور مثلث ۱ را کنار مثلث ۴ و مثلث ۳ را کنار مثلث ۲ قرار می‌دهیم. (شکل ۴)



(شکل ۴)

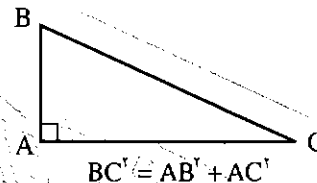
برای آن که نقش فیثاغورس را در تبیین اصول ریاضیات درک کنیم، لازم است کمی درباره جایگاه ریاضیات در عصر وی و پیشرفت هایی که تا زمان وی صورت گرفته بود، بدانیم که این هم به نوبه خود، درخور توجه است. جالب است بدانید با این که مبنای ریاضیات بر «استدلال» استوار است، قبل از فیثاغورس هیچ کس نظر روشنی درباره این موضوع نداشت که استدلال باید مبنی بر مفروضات باشد. به عبارتی استدلال، مسئله ی تعریف شده ای نبود.

در واقع می‌توان گفت بنا به قول مشهور، فیثاغورس در بین اروپاییان اولین کسی بود که روی این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا «اصول موضوع» و «اصول متعارفی» را معین کرد و آنگاه به اتکاء آن‌ها که «مفروضات» هم نامیده می‌شوند، روش استنتاج متوالی را پیش گرفت به پیش رفت. از نظر تاریخی «اصول متعارفی» عبارت بود از «حقیقتی لازم و خود به خود واضح».

این که فیثاغورس استدلال را وارد ریاضیات کرد، از مهم ترین حوادث علمی است و قبل از فیثاغورس، هندسه عبارت بود از مجموعه قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده اند؛ تجارب و قواعدی که هیچ گونه ارتباطی با هم نداشتند حتی کسی در آن زمان حدس نمی‌زد مجموعه ی این قواعد را بتوان از عده ی بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. در صورتی که امروزه حتی تصور این موضوع که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است برای ما ممکن نیست. اما در آن عصر این موضوع گام بلندی به سوی نظام قدرتمند هندسه محسوب می‌شد.

قضیه فیثاغورس

یکی از معروف ترین قضیه ها در هندسه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل مسائل هندسه می‌باشد. از کاربردهای مهم این قضیه می‌توان در محاسبه ی فاصله ی بین دو نقطه در صفحه و فضا و معادله ی دایره در صفحه (هندسه تحلیلی) نام برد. بیشتر دانش آموزان این قضیه را به خوبی می‌شناسند و در حل مسائل از آن کمک می‌گیرند، قضیه ی فیثاغورس می‌گوید:
«در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر»



در این مقاله با دو روش عملی درستی قضیه ی فیثاغورس را بررسی کرده، هم چنین درستی قضیه فیثاغورس به روش های جبری و تحلیلی ثابت می‌کنیم و در انتها؛ با طرح یک مسأله کاربردی، ارتفاع هرم خنوپس را محاسبه می‌کنیم.

شکل ۴ از دو مربع به ضلع های a و b تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = a^2 + b^2$$

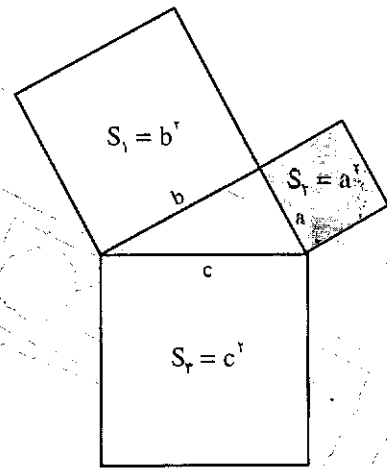
با توجه به مساحت شکل های ۳ و ۴ درمی یابیم که:

$$\begin{cases} S = c^2 \\ S = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

با توجه به رابطیه ی اخیر درستی قضیه ی فیثاغورس برقرار است.

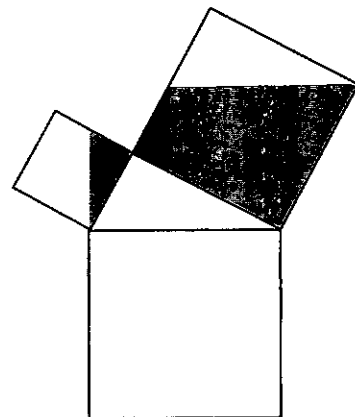


روش عملی دوم. مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a ($c > b > a$) در نظر می گیریم و روی وتر این مثلث یک مربع بزرگ به طول c و روی دو ضلع زاویه قائمه دو مربع دیگر به طول های b و a بنا می کنیم. (شکل ۵)



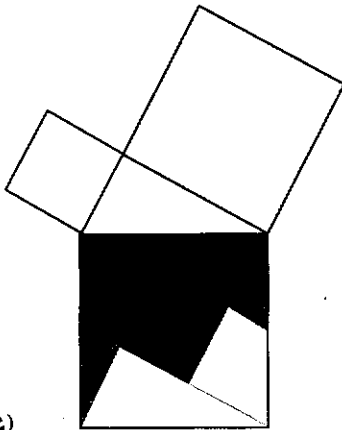
(شکل ۵)

اکنون سطح مربع های کوچک تر را که روی ضلع های زاویه ی بنا شده اند، به قطعات کوچک تری تقسیم می کنیم. (شکل ۶)



(شکل ۶)

در این مرحله می توانیم با قطعات کوچک تری که به دست آورده ایم، سطح مربع بزرگ تر را کاملاً پوشانیم یا موزایک کنیم.



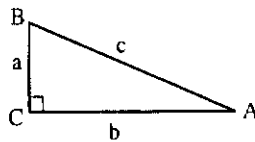
(شکل ۷)

با توجه به دو شکل ۶ و ۷ ملاحظه می کنیم که مجموع مساحت های دو مربع کوچک تر برابر با مساحت مربع بزرگ تر است، از آن جا که مجموع مساحت های دو مربع کوچک تر برابر با $a^2 + b^2$ است و مساحت مربع بزرگ تر برابر با c^2 می باشد، درستی قضیه فیثاغورس برقرار است، یعنی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

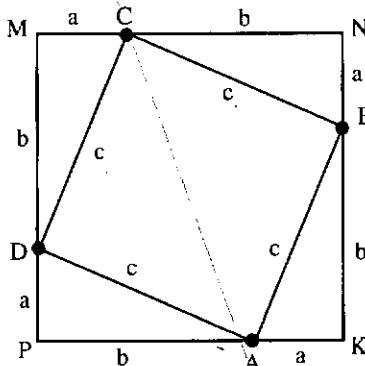
اثبات جبری قضیه ی فیثاغورس

مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a ($c > b > a$) در نظر می گیریم.



(شکل ۸)

می خواهیم در این مثلث نشان دهیم که: $c^2 = a^2 + b^2$ برای این منظور شکل زیر را رسم می کنیم (شکل ۹) همان طور که ملاحظه می کنید این شکل از کنار هم قرار گرفتن چهار مثلث مانند $\triangle ABC$ در شکل ۸، به وجود آمده است.



(شکل ۹)

در شکل ۹، یک مربع بزرگ مشاهده می کنید که طول هر ضلع آن برابر با $a+b$ است، در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S = (a+b)(a+b)$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \text{؛ در نتیجه داریم:}$$

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; m_{AC} = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_2}$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_2}{y_2 - y_2}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = (y_2 - y_1)(y_2 - y_2)$$

$$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - x_2x_2 - x_1x_2 - y_2y_2 - y_1y_2$$

$$= -y_1y_2 - x_1x_2 \quad (2)$$

اکنون رابطه ی (۲) را در رابطه ی (۱) جایگزین می کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(-y_1y_2 - x_1x_2)$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) + (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2)$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

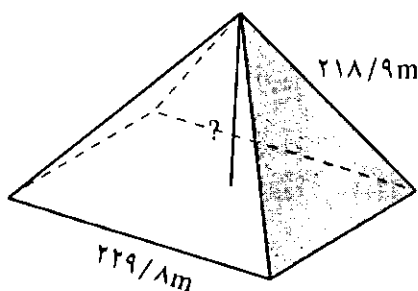
در این قسمت از مقاله به ارائه یک مسأله کاربردی از قضیه

فیثاغورس می پردازیم.

بلندای هرم خنوپس

جیزه یکی از شهرهای کشور مصر است. شهر جیزه در استان جیزه قرار دارد و هرم آن یعنی هرم بزرگ جیزه شهرت جهانی دارد. هرم بزرگ جیزه در اصل همان هرم خنوپس (کنوپس) بزرگترین هرم از اهرام سه گانه ی مصر است. ساخت این هرم در زمان حیات فرعون خنوپس آغاز شد ولی مدت ها بعد از مرگ او به پایان رسید. این هرم هم مانند هرم های دیگر شامل مقبره ی شاه و ملکه به صورت مجزا است که البته بعد از اکتشاف هر دو خالی بوده اند. سطح زیربنای هرم، یک مربع به طول ۲۲۹/۸ متر است و در بنای آن سنگ هایی از یک تن تا چهل تن به کار رفته اند. گفته می شود که حدود ۱۰۰/۰۰۰ کارگر برای ساختن این بنا، بیشتر از ۲۰ سال زحمت کشیده اند.

قاعده ی هرم خنوپس مربعی به طول ۲۲۹/۸ متر و هریال جانبی آن به طول ۲۱۸/۹ متر است. می خواهیم ارتفاع این هرم را پیدا کنیم.



مربع CBAD به ضلع C وجود دارد که مساحت آن برابر با

$S_1 = c^2$ و مساحت هر مثلث قائم الزاویه برابر با $S_2 = \frac{1}{2}ab$ است؛

با توجه به شکل ۹ ملاحظه می کنید:

$$S_{MNPQ} = S_{CBAD} + 4S_{BNC}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + 4S_2$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b) = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

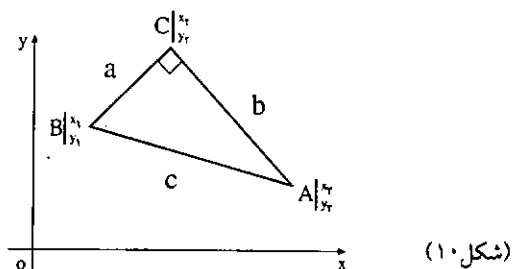
اثبات تحلیلی قضیه ی فیثاغورس

مثلث قائم الزاویه ABC را با مختصات رأس های $B(x_1, y_1)$ ، $A(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ و طول ضلع های a ، b و c در نظر می گیریم به طوری که $c > b > a$ ، می خواهیم باروش تحلیلی ثابت کنیم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

برای این منظور طول ضلع های مثلث را به کمک مختصات رأس های آن به دست می آوریم، سپس درستی رابطه ی ذیل را نشان می دهیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$



(شکل ۱۰)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

$$BC^2 + AC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2$$

$$= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2$$

$$+ x_2^2 + x_1^2 - 2x_2x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_2y_2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1^2 + y_1^2$$

$$- x_2x_2 - x_1x_2 - y_2y_2 - y_1y_2) \quad (1)$$

از طرفی چون مثلث ABC در رأس C قائمه است، پس:

تقدیر از پیشه

۱. مکعبی به ضلع ۴ اینچ (هر اینچ حدود ۲/۵ سانتی متر است) را رنگ و سپس آن را به ۶۴ مکعب یک اینچی تقسیم کرده ایم. یکی از این مکعب های کوچک را به تصادف برمی داریم و می اندازیم. احتمال این که هیچ یک از پنج وجه دیده شونده ی آن رنگ نشده باشد، چیست؟

۲. سعید که آدم عجولی است، از پله ی برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می رود و پس از ۲۰ پله بالای آن می رسد. روز بعد، باز هم در حالی که پله ی برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می رود و در ۳۲ پله به بالای آن می رسد. در صورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟

$$0.7 = 0.1(1 + x)$$

در اینجا می توانیم به کمک فرمول $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست آوریم:

$$0.7 = 0.1 + (n-1) \cdot 0.1$$

$$0.6 = (n-1) \cdot 0.1$$

$$6 = n-1 \Rightarrow n = 7$$

پس پاسخ نهایی ۷ است.

۳. در یک بازی شانس، یک توپ قرمز و یک توپ سبز در یک جعبه قرار داده شده است.

اگر یک توپ قرمز و یک توپ سبز را به ترتیب بیرون بکشیم، احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند، $\frac{1}{4}$ است.

اگر یک توپ قرمز و یک توپ سبز را به ترتیب بیرون بکشیم، احتمال اینکه هر دو توپ سبز باشند، $\frac{1}{4}$ است.

پس پاسخ نهایی ۰.۷۵ است.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

در اینجا می توانیم به کمک فرمول $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست آوریم:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(n-1)$$

پس پاسخ نهایی ۱.۵ است.

۴. در یک بازی شانس، یک توپ قرمز و یک توپ سبز در یک جعبه قرار داده شده است.

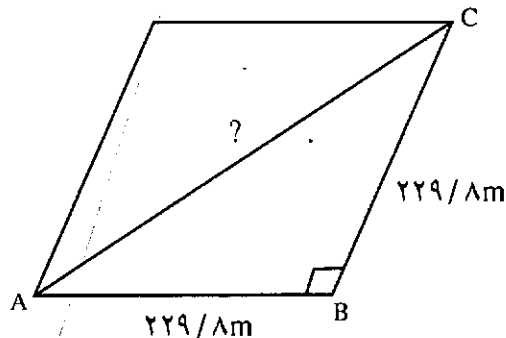
اگر یک توپ قرمز و یک توپ سبز را به ترتیب بیرون بکشیم، احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند، $\frac{1}{4}$ است.

اگر یک توپ قرمز و یک توپ سبز را به ترتیب بیرون بکشیم، احتمال اینکه هر دو توپ سبز باشند، $\frac{1}{4}$ است.

پس پاسخ نهایی ۰.۷۵ است.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

برای این منظور ابتدا قطر مربع مقطع هرم را به کمک رابطه ی فیثاغورس مشخص می کنیم.



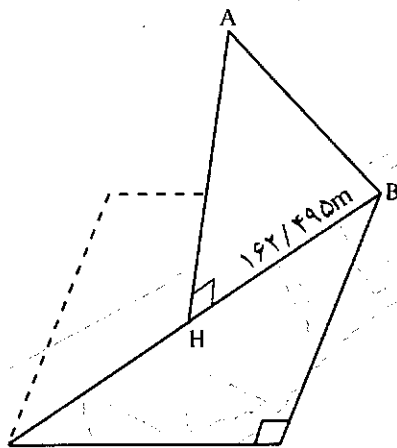
در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = \left(\frac{229}{8}\right)^2 + \left(\frac{229}{8}\right)^2 = 105616/64$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{105616/64} = 324/8$$

اکنون با توجه به شکل زیر در مثلث قائم الزاویه ی ABH، بلندی اکتون را محاسبه می کنیم.



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = \left(\frac{162}{49}\right)^2 - \left(\frac{162}{49}\right)^2 = 21512/58$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{21512/58} = 146/49$$

1. cheops

1. <http://mathematica.ludibunda.ch>

2. <http://www.mathsisfun.com>

3. <http://www.subtangent.com>

4. <http://fa.wikipedia.org>