

# بسط دو جمله‌ای «خیام» - «نیوتن» و تعمیم آن

سید محمد رضا هاشمی موسوی

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

این اعداد ضریبهای بسط دو جمله‌ای  $(a+b)^4$  بوده و داریم:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

با در نظر گرفتن ضریبها و نظم خاصی که بین جمله‌های بسط موجود است نتیجه می‌شود که بسط دو جمله‌ای نیوتن دارای ویژگیهایی است که با کمک آنها نیز می‌توان به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عبارت  $(a+b)^n$  را به صورت یک چندجمله‌ای تبدیل کرده و ضرایب جمله‌ها را حساب کرد.

این ویژگیها عبارتند از:

۱- این بسط دارای  $(n+1)$  جمله متمایز است و بر حسب  $a$  و  $b$  چند جمله‌ای درجه  $n$  متقارن و همگن است.

۲- ضریب هر جمله در بسط برابر است با حاصل ضرب ضریب جمله قبل در توان حرف  $a$  در آن جمله، تقسیم بر تعداد جمله‌هایی که تا آن جمله نوشته شده است.

۳- وقتی بر حسب توان نزولی  $a$  نوشته شود با جمله  $a^n$  شروع و به جمله  $b^n$  ختم می‌شود.

۴- در هر جمله در مقایسه با جمله قبل یک واحد از توان  $a$  کسر و یک واحد به توان  $b$  اضافه می‌شود.

۵- جمله‌هایی که از دو طرف به یک فاصله باشند ضریبهای متساوی دارند.

۶- مجموع توان  $a$  و توان  $b$  در هر جمله برابر مقدار ثابت  $n$  است.

۷- مجموع ضریبهای بسط برابر است با:  $2^n$ .

۸- هرگاه ضریب جمله  $a^p$  با ضریب جمله  $a^r$  بسط برابر

در جبر، هر عبارت به صورت کلی  $(a+b)^n$  را دو جمله‌ای «نیوتن» و چند جمله‌ای هم ارز با آن را بسط دو جمله‌ای «نیوتن» می‌گویند. به عنوان مثال؛ دو جمله‌ای نیوتن به ازای  $n=0$  و  $n=1$  و  $n=2$  و  $n=3$  ... به شکل زیر است که طرف دوم آن بسط دو جمله‌ای است. یعنی داریم:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\dots$$

اگر ضریبهای این چند جمله‌ایها را به ترتیب زیر بنویسیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & & & \dots \end{array}$$

شکلی شبیه مثلث حاصل می‌شود که مجموع هر دو عدد هر سطر یکی از ضریبهای سطر بعد را می‌دهد و روی دو ساق مثلث عدد ثابت ۱ قرار دارد. در این صورت به کمک مثلث فوق اعداد واقع در سطر بعد به دست می‌آید و در نتیجه ضرایب بسط دو جمله‌ای را برای هر عدد طبیعی  $n$  می‌توان نوشت. مثلاً سطر پنجم عبارت است از:

مثال ۱: در بسط دو جمله‌ای  $(3x+2y)^{n^2}$  مقدار  $n$  را چنان تعیین کنید که مجموع ضریبهای بسط برابر ۶۲۵ شود.  
حل: برای به دست آوردن مجموع ضریبهای بسط،  
 $x=y=1$  اختیار می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$(3+2)^{n^2} = 625$$

$$5^{n^2} = 5^4 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$$

مثال ۲: در بسط دو جمله‌ای  $(k^2x^2+3)^7$  مقدار  $k$  را چنان تعیین کنید که مجموع ضریبهای بسط برابر ۱۲۸ باشد.  
حل: برای به دست آوردن مجموع ضریبهای بسط،  $x=1$  اختیار می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$(k^2+3)^7 = 128$$

$$(k^2+3)^7 = 2^7 \Rightarrow k^2+3=2$$

$$\Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow k = -1$$

مثال ۳: مجموع ضریبهای عددی بسط:

$$(3x^2y - y^2z - zt)^{100}$$

را حساب کنید.

حل: با اختیار کردن  $x=y=z=t=1$  داریم:

$$\text{مجموع ضرایب} = (3-1-1)^{100} = 1^{100} = 1$$

مثال ۴: مجموع جبری ضرایب عددی را در چند جمله‌ای که از بسط عبارت زیر به دست می‌آید، پیدا کنید:

$$(x^7 - 3x^5 + x^2y^2 - x^{15}y^2z^2 + z)^{21} + (x^5 - y^2z^2 + xyz)^{15} + (x+y)^5 - 12$$

حل: با اختیار کردن  $x=y=z=1$  داریم:

$$\text{مجموع ضرایب} = (-1)^{21} + (1)^{15} + (2)^5 - 12 = 20$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از  $n$  مجموع ضریبهای

$$\text{بسط } \left(\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^n \text{ از مجموع ضریبهای بسط}$$

$$\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}\right)^{2n} \text{ واحد کمتر است.}$$

باشد، آنگاه داریم:  $p+r=n+2$ .

۹- جمله  $k$ ام بسط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(n! = n \times (n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1, 0! = 1)$$

(نماد ضریب جمله  $k$ ام  $\binom{n}{k}$  و یا  $C_n^k$  است).

$$C_n^k a^{n-k+1} b^{k-1} \text{ و یا } \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k-1} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

با توجه به ویژگیهای فوق بسط دو جمله‌ای نیوتن را برای هر عدد طبیعی  $n$  می‌توان نوشت، به عنوان مثال، برای  $n=5$  داریم:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

و در حالت کلی داریم:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

هر گاه در دستور فوق  $b$  را به  $-b$  تبدیل کنیم ضریبهای جمله‌های بالا يك درمیان مثبت و منفی می‌شوند یعنی:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 -$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + (-1)^n b^n$$

بدیهی است با اختیار کردن  $a=b=1$  مجموع ضریبهای بسط دو جمله‌ای به دست خواهد آمد. در نتیجه مجموع ضریبها در بسط  $(a-b)^n$  برابر صفر است و داریم:

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + (-1)^n = 0$$

$$= C_n^{16} (\sqrt[4]{x^2})^{n-15} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)^{15}$$

$$= C_n^{16} x^{\frac{2(n-15)}{4}} \times x^{-\frac{4 \times 15}{2}} = C_n^{16} x^{\frac{2(n-15)}{4} - 12}$$

$$= C_n^{16} x^{\frac{2n-45-48}{4}} = C_n^{16} x^{\frac{2n-93}{4}}$$

چون جمله شانزدهم مستقل از  $x$  است پس باید فاقد  $x$  باشد و این وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$\frac{2n-93}{4} = 0 \Rightarrow 2n-93=0$$

$$\Rightarrow n = \frac{93}{2} \Rightarrow n = 31$$

مثال ۹: جمله مستقل از  $x$  را در بسط دو جمله‌ای

$$\left( \sqrt[5]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)^{29}$$

به دست آورید.

حل:

$$C_n^{k+1} a^{n-k} b^k = \text{جمله } (k+1)ام$$

$$= C_n^{k+1} (\sqrt[5]{x^5})^{29-k} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)^k$$

$$= C_n^{k+1} x^{\frac{5(29-k)}{5}} \times x^{-\frac{2k}{2}}$$

$$= C_n^{k+1} x^{\frac{15(29-k)-14k}{21}} \quad \text{چون فاقد } x \text{ است}$$

$$\frac{15(29-k)-14k}{21} = 0 \Rightarrow k = 15$$

بنابراین جمله  $(k+1)ام$  مستقل از  $x$  است. یعنی جمله شانزدهم فاقد  $x$  است (با توجه به تقارن هر جمله نسبت به جمله وسط بسط، آیا مسئله جواب دیگری دارد؟ در صورت وجود آن را بیابید).

حل: با اختیار کردن،  $x=y=1$ ، باید داشته باشیم:

$$2^n = 2^n + 992 \Rightarrow$$

$$(2^n)^2 - (2^n) - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$(2^n - 32)(2^n + 31) = 0 \Rightarrow 2^n = 32$$

$$(2^n + 31 \neq 0) \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

مثال ۶: اگر در بسط،  $(x+y)^n$  ضریب جمله نوزدهم با ضریب جمله هفتم برابر باشد،  $n$  را حساب کنید.

حل: با توجه به فرمول،  $p+r=n+1$  داریم:

$$19+7=n+1 \Rightarrow n=24$$

مثال ۷: جمله ششم در بسط  $(2x^2+y^2)^7$  را تعیین

کنید.

حل: با استفاده از فرمول،

$$C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ضریب جمله  $kام$ . همچنین جمله عمومی بسط  $(a+b)^n$  یعنی:

$$C_n^k a^{n-k+1} b^{k-1} \quad \text{داریم:}$$

$$a = 2x^2$$

$$\begin{cases} n=7 \\ k=6 \end{cases} \Rightarrow \text{جمله ششم} = C_7^6 (2x^2)^2 (y^2)^1$$

$$b = y^2$$

$$\text{جمله ششم} = \frac{7!}{1!6!} 4x^4 y^2 = 84x^4 y^2$$

$$\left( \sqrt[4]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)^n \quad \text{مثال ۸: اگر در بسط دو جمله‌ای،}$$

جمله شانزدهم مستقل از  $x$  باشد،  $n$  را حساب کنید.

$$\text{جمله شانزدهم} = C_n^{16} a^{n-15} b^{15}$$

حل:

بنابراین تنها  $k=2$  در شرایط فوق صدق می کند. یعنی تنها جمله گویا در بسط، جمله سوم یعنی

$$C_2^5 (\sqrt[5]{2})^2 (\sqrt[5]{2})^3 = 60$$

است.

مثال ۱۲: در بسط عبارت  $(1+x)^n$  بزرگترین ضریب را پیدا کنید.

حل: ضریب جمله عمومی بسط  $(1+x)^n$  برابر  $C_n^k$  بوده و بنابراین باید تعیین کنیم به ازای چه مقداری از  $k$  ضریب  $C_n^k$  حداکثر خواهد بود. می دانیم:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k}$$

$$= C_n^{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

اگر  $k$  مقدارهای ۱ و ۳ و ۴ و ... را اختیار کند فاکتور

$$\left[ \frac{n+1}{k} - 1 \right]$$

در عبارت:  $C_n^k = C_n^{k-1} \frac{n-k+1}{k}$  تنزل می یابد و در نتیجه

اگر  $\frac{n+1}{k} - 1 > 1$  باشد، مقدار  $C_n^k$  مرتباً افزایش خواهد یافت. یعنی:

$$\frac{n+1}{k} - 1 > 1 \Rightarrow \frac{n+1}{k} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2} > k$$

با توجه به نامساوی فوق اکنون باید بزرگترین مقدار  $k$  را انتخاب کرد. بنابراین اگر  $n$  زوج یا فرد باشد داریم:

الف) اگر  $n=2m$  باشد:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2} > k$$

مثال ۱۰: ضریب  $x^{-27}$  را در بسط  $(x^5 - \frac{1}{x^7})^9$

پیدا کنید.

حل: جمله عمومی بسط چنین است:

$$T_{k+1} = (a-b)^n \text{ (جمله } (k+1) \text{)} = \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow$$

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} (x^5)^{9-k} \left(\frac{1}{x^7}\right)^k$$

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} (x^{45-5k})(x^{-7k})$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{45-12k} \Rightarrow 45-12k = -27$$

$$12k = 45 + 27 \Rightarrow 12k = 72$$

$$\Rightarrow k = \frac{72}{12} = 6 \Rightarrow k = 6$$

$$T_7 = (-1)^6 \binom{9}{6} x^{-27} = \frac{9!}{6!3!} x^{-27}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3} x^{-27} = 84 x^{-27}$$

بنابراین ضریب جمله هفتم برابر ۸۴ است که ضریب  $x^{-27}$  می باشد.

مثال ۱۱: مطلوب است جمله های گویا در بسط دو

جمله ای:  $(\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{2})^5$

حل: با استفاده از جمله عمومی خواهیم داشت:

$$(a+b)^n \text{ (جمله } (k+1) \text{)} = C_n^k (\sqrt[5]{2})^{5-k} (\sqrt[5]{2})^k$$

$$T_{k+1} = C_n^k \frac{5-k}{2} \times \frac{k}{2}$$

اگر  $T_{k+1}$  گویا باشد باید اعداد  $\frac{5-k}{2}$ ،  $\frac{k}{2}$  صحیح باشند

و با توجه به این که  $k \leq 5$ ، بنابراین اولاً باید  $k$  اعداد زوج

کوچکتر یا مساوی ۵ باشد و ثانیاً  $\frac{5-k}{2}$  باید عدد صحیح باشد.



یعنی به ترتیب:

$$\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{6}, \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}, \frac{n}{2}$$

تشکیل تصاعد حسابی بدهند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2} &= \\ \frac{\frac{n}{2} + \frac{1}{6} \left[ \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2) \right]}{2} &= \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) &= \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \left[ \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2) \right] \\ \Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{n}{2}\right) + 14 &= 0 \\ \frac{n}{2} \left[ \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{n}{2}\right) + 14 \right] &= 0 \Rightarrow \\ \begin{cases} \frac{n}{2} = 0 \\ \frac{n}{2} = 7 \\ \frac{n}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 14 \\ n = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین يك مقدار مورد قبول برای  $n$  به دست می آید که عبارت است از:  $n = 14$ .

مثال ۱۷: می دانیم  $e$  پایه لگاریتم طبیعی است و مقدار آن چنین است:

$$e = 2.71828 \dots$$

و به شکل بسته به صورت حدی:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

نمایش می دهند.

$$\text{جمله چهارم} = C_2^2 (\sqrt[2]{10X})^{\frac{2}{2 \log x + 2}} (\sqrt[12]{10X})^2 = 200$$

$$\Rightarrow 20(10X)^{\frac{2}{2 \log x + 2}} (10X)^{\frac{1}{2}} = 200 \Rightarrow$$

$$(10X)^{\frac{5 + \log x + 2}{2(\log x + 2)}} = 10$$

$$(10X)^{\frac{8 + \log x}{2(\log x + 2)}} = 10 \xrightarrow{\text{از طرفین تساوی لگاریتم می گیریم}} \Rightarrow$$

$$\left[ \frac{8 + \log X}{2(\log X + 2)} \right] \log 10X = 1$$

$$(8 + \log X)(\log X + 1) = 2(\log X + 2)$$

$$\Rightarrow 8 \log X + 8 + \log^2 X + \log X = 2 \log X + 4$$

$$\log^2 X + 5 \log X = 0 \Rightarrow \log X (\log X + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log X = 0 \rightarrow X_1 = 1 \\ \log X + 5 = 0 \rightarrow X_2 = 10^{-5} \end{cases}$$

بنابراین به ازای  $X = 1$  یا  $X = 10^{-5}$  جمله چهارم بسط فوق مساوی ۲۰۰ می شود.

مثال ۱۵: به ازای چه مقدار از  $n$ ، ضرایب جمله های دوم و سوم و چهارم در بسط عبارت:

$$\left( \sqrt[2]{x} + \sqrt[5]{y} \right)^{\frac{1+2+\dots+n}{1+n}}$$

تشکیل تصاعد حسابی می دهند.

حل: با توجه به فرض مسأله باید ضرایب جمله های دوم و سوم و چهارم تشکیل تصاعد حسابی بدهند یعنی جمله سوم باید واسطه حسابی جمله های دوم و چهارم باشد. ابتدا دو جمله ای فوق را به شکل ساده تری می نویسیم. یعنی:

$$\left( \sqrt[2]{x} + \sqrt[5]{y} \right)^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}} = \left( \sqrt[2]{x} + \sqrt[5]{y} \right)^{\frac{n}{2}}$$

اینک باید مقادیرهای:

$$C_{\frac{n}{2}}^2, C_{\frac{n}{2}}^3, C_{\frac{n}{2}}^4$$

از تعریف فوق ثابت کنید:

حل:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

حل: ابتدا دو جمله‌ای  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  را بسط می‌دهیم و

سپس از هر يك از جملات حد می‌گیریم یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n}{1!} \left(\frac{1}{n}\right) + \dots\right]$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1!} \left(\frac{1}{n}\right) +$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right] +$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 \right] + \dots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} \right] +$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} \right] + \dots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2.71828\dots$$

مثال ۱۸: مقدار  $\frac{1}{\sqrt{32}}$  را تا چهار رقم اعشار محاسبه

کنید.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{32}} &= (32)^{-\frac{1}{2}} = (6^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{4}{6^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^4} + \dots\right) \\ &= 0.17677 \end{aligned}$$

از بسط دو جمله‌ای اخیر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{32}} = 0.17677$$

مثال ۱۹: نشان دهید ریشه  $n$ ام هر عدد حقیقی یعنی

$\sqrt[n]{a}$  را می‌توان به مجموع بی‌نهایت عدد گویا نمایش داد. به عبارت دیگر هر عدد گنگ (اصم) مجموع بی‌نهایت عدد گویا می‌باشد.

برهان: برای اثبات، کافی است  $\sqrt[n]{a}$  را به سری بسطدهیم. برای این منظور در حالت کلی  $a^m$  را بسط می‌دهیم و ازآنجا با اختیار  $m = \frac{1}{n}$  حکم ثابت می‌شود. برای بسط  $a^m$ 

به سری به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a^m &= \frac{1}{a^{-m}} = \left(1 - 1 + \frac{1}{a}\right)^{-m} \\ &= \left(1 - \left(\frac{a-1}{a}\right)\right)^{-m} \\ &= 1 + m \left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{m(m+1)}{2!} \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{پراز اختصار لازم}} s_n &= \frac{1}{r^{n-1}} \left[ s^n + \frac{n(n-1)}{2!} s^{n-2} \Delta \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} s^{n-4} \Delta^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

رابطه فوق بیان  $s_n$  را بر حسب  $s$  و  $p$  نشان می‌دهد.

### تعمیم دستور بسط دوجمله‌ای

ایده بسط دو جمله‌ای یعنی بسط  $(x+y)^n$  الهام‌آور تعمیم آن یعنی بسط چند جمله‌ای  $(x+y+z+\dots)^n$  است. برای به دست آوردن ضریبهای بسط چند جمله‌ای فوق ابتدا لازم است روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای را به وسیله ترکیب ارائه دهیم و سپس روش ارائه داده شده را تعمیم دهیم و از آنجا ضریبهای بسط چند جمله‌ای را به دست آوریم. در اینجا با یک مثال روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای را با روش ترکیب نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، بسط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 \\ &\quad + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود سمت راست تساوی فوق دارای شش جمله  $x^5$ ،  $5x^4y$ ،  $10x^3y^2$ ،  $10x^2y^3$ ،  $5xy^4$ ،  $y^5$  است. آنچه در اینجا مورد نظر است این است که ضریبهای این جمله‌ها را یعنی ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ را به وسیله نظریه ترکیبها بیان کنیم. اینک نتایج ضرب چند دو جمله‌ای را بررسی می‌کنیم. مثلاً برای ضرب  $(A+B)(C+D)$  داریم:

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

در مجموع اخیر هر کدام از جمله‌ها، حاصل ضرب دو نماد است، که یکی از اولین برانتز و دیگری از برانتزدوم حاصل ضرب اصلی گرفته شده است. مشاهده می‌شود که برای انتخاب یک نماد از دوجمله‌ای اول و یک نماد از دو جمله‌ای دوم دقیقاً  $2 \times 2 = 4$  راه مختلف وجود دارد. اکنون حاصل ضرب سه دوجمله‌ای زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a^n &= 1 + m\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \\ &\quad + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \dots \\ m &= \frac{1}{n} : \sqrt[n]{a} = 1 + \left(\frac{a-1}{na}\right) + \frac{n+1}{2!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(n+1)(2n+1)}{3!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^3 + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

مثال ۳۰: مقدار  $\sqrt[5]{5}$  را با تقریب دلخواه به توسط سری حساب کنید.

حل: با توجه به بسط  $\sqrt[n]{a}$  به سری می‌توان  $\sqrt[5]{5}$  را با تقریب دلخواه حساب کرد.

با توجه به تساوی (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{5} &= 1 + \left(\frac{4}{15}\right) + \frac{4}{2!}\left(\frac{4}{15}\right)^2 \\ &\quad + \frac{4 \times 7}{3!}\left(\frac{4}{15}\right)^3 + \dots \approx 1.70999 \dots \end{aligned}$$

مثال ۳۱: عبارت  $s_n = x^n + y^n$  را بر حسب  $s$  و  $p$  بیان کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} &\Rightarrow X^2 - sX + p = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \\ y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \end{cases} & (\Delta = s^2 - 4p) \end{aligned}$$

اینک برای بیان  $s_n$  بر حسب  $s$  و  $p$  کافی است مقادیر  $x$  و  $y$  را جایگزین کنیم. یعنی:

$$s_n = \left(\frac{s + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^n + \left(\frac{s - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^n$$

راههای نوشتن دو  $x$  و سه  $y$  در يك ردیف  
(به طور کلی با فرض،  $r+s=n$  داریم:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{s!(n-s)!} = C(n, s)$$

چنین است:

$$C(5, 2) = C(5, 3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

تحلیل فوق، عدد ۱۰ را که ضریب  $x^2y^3$  در بسط دو جمله‌ای  $(x+y)^5$  است را نشان می‌دهد. با روشی مشابه می‌توان ضریبهای دیگر را به دست آورد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C(5, 0)x^5 + C(5, 1)x^4y \\ &+ C(5, 2)x^3y^2 + C(5, 3)x^2y^3 + C(5, 4)xy^4 \\ &+ C(5, 5)y^5\end{aligned}$$

در اینجا با تعمیم این الگو، برای بسط دو جمله‌ای  $(x+y)^n$  که در آن  $n$  عدد صحیح مثبت دلخواهی است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y \\ &+ \dots + C(n, n)y^n\end{aligned}$$

لازم به توضیح است که اغلب نماد  $\binom{n}{k}$  را مخصوصاً در بسط دو جمله‌ای، به جای  $C(n, k)$  و یا  $C_n^k$  به کار می‌برند، که در نتیجه بسط دو جمله‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 \\ &+ \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n\end{aligned}$$

بنابراین بسط دو جمله‌ای با روش ترکیب به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + y^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)(C+D)(E+F) &= ACE + ADE + BCE \\ &+ BDE + ACF + ADF + BCF + BDF\end{aligned}$$

به طور مشابه توجه می‌کنیم که این عبارت نیز شامل هشت جمله است، که هر يك، حاصل ضرب سه نمادی است که به ترتیب از سه دو جمله‌ای انتخاب شده‌اند. مجدداً می‌بینیم که سه  $2 \times 2 \times 2 = 8$  طریق می‌توان سه نماد را، که هر کدام از يك دو جمله‌ای هستند، انتخاب کرد. نتایج مشابهی برای حاصل ضرب توسیع یافته چهار یا پنج یا  $n$ ، چند جمله‌ای وجود دارد. حال حاصل ضرب:

$$(A+B)(C+D)(E+F)(g+h)(R+S)$$

را در نظر می‌گیریم. بسط عبارت فوق از مجموع

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

جمله تشکیل یافته است. به عنوان نمونه‌ای از جمله‌ها می‌توان جمله  $ACRhe$  را در نظر گرفت که به طور کلی هر جمله بسط، حاصل ضرب پنج نماد است که هر نماد از یکی از پنج دو جمله‌ای اصلی انتخاب شده است. حال در اینجا با توجه به مطالبهای اخیر،  $(x+y)^5$  را به صورت حاصل ضرب زیر در نظر می‌گیریم.

یعنی:

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

و بدیهی است برای انتخاب پنج نماد، هر کدام فقط از يك پیرانتز، ۳۲ راه موجود است، اما ۳۲ جمله حاصل همگی از هم متمایز نیستند. به عنوان مثال، اگر عبارت  $x^2y^3$  را به ترتیب از ضرب  $x$ ها و  $y$ های بخصوصی نتیجه بگیریم مثلاً داشته باشیم:

$$xyyyx = x^2y^3$$

واضح است که عبارت‌های  $xyxyx$ ،  $xyxyy$ ،  $xxyyy$  و غیره نیز باز هم  $x^2y^3$  را نتیجه می‌دهند. به بیان دیگر عبارت  $x^2y^3$  در بسط  $(x+y)^5$ ، دقیقاً به تعداد راههایی است که دو  $x$  و سه  $y$  را بتوان با ترتیبهای مختلف نوشت و در نتیجه با توجه به نظریه ترکیبها داریم:  $C(5, 3) = C(5, 2)$ . یعنی تعداد

بنابر این در اینجا دیگر می توان نتیجه گرفت که به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، بسط چند جمله ای  $(x+y+z+t+\dots)^n$  برابر با مجموع تمام جمله هایی به صورت زیر است:

$$\frac{n!}{a!b!c!d!\dots} x^a y^b z^c t^d \dots$$

که در آن  $d, c, b, a$  : ... روی تمام جوابهای معادله

$$a+b+c+d+\dots=n$$

از مجموعه اعداد صحیح نامنفی تغییر می کنند. بدیهی است که با اختیار کردن  $c=d=\dots=0$  داریم:

$$\frac{n!}{a!b!} x^a y^b$$

با شرط  $a+b=n$  و یا به عبارت دیگر

$$\frac{n!}{a!(n-a)!} x^a y^{n-a}$$

که همان جمله عمومی بسط دو جمله ای است.

مثال ۲۳: در بسط  $(x+y+z+t)^{19}$  ضرایب جمله هایی به صورت  $x^5 y^6 z^7 t^1$  و  $x^{12} y^7$  و  $x^4 y^2 z^2 t^{10}$  را بنویسید.

حل: بسط فوق دارای جمله هایی به شکل

$$\frac{19!}{a!b!c!d!} x^a y^b z^c t^d$$

است با شرط  $a+b+c+d=19$  و  $d, c, b, a$  نامنفی.

بسط فوق جمله  $x^5 y^6 z^7 t^1$  را شامل نمی شود زیرا داریم:

$$5+6+7+1=19$$

همچنین شامل جمله  $x^4 y^{10} z^9 t^{-4}$  نیز نمی شود زیرا توان  $t$  منفی است.

اما دو جمله دیگر در بسط فوق موجود می باشند و ضریبهای آنان چنین است:

اینک در اینجا باروشی مشابه و با استفاده از ترکیب، ضریبهای بسط چند جمله ای  $(x+y+z+\dots)^n$  را می توان نتیجه گرفت. به عنوان مثال، بسط  $(x+y+z)^9$  دارای جمله ای به صورت  $x^2 y^4 z^3$  است زیرا مجموع توانهای آنها برابر

$$3+4+2=9$$

است. این جمله بخصوص در بسط زیر:

$$(x+y+z)^9 = \underbrace{(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)}_{9 \text{ مرتبه}}$$

به همان تعدادی ظاهر می شود که می توان  $x$  را از سه عامل از نه عامل، و  $y$  را از چهار عامل از شش عامل باقیمانده و  $z$  را از دو عامل باقیمانده انتخاب کرد. نظیر استدلالی که در حالت بسط دو جمله ای ارائه شد در اینجا نیز می توان عبارت  $x^2 y^4 z^3$  را به حالت های گوناگونی مانند:

$$zx yz x y y x y, x y z x y z x y y, y x x z y z y y x$$

و غیره نوشت و از این مدل نتیجه زیر را به دست آورد، یعنی ضریب جمله  $x^2 y^4 z^3$  در بسط سه جمله ای چنین است:

$$C(9,3) \times C(6,4) \times C(2,2)$$

که برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{ضریب جمله } x^2 y^4 z^3 &= \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{2!}{0!2!} \\ &= \frac{9!}{3!4!2!} \end{aligned}$$

به طور کلی می توان نتیجه گرفت که ضریب جمله  $x^a y^b z^c$  در بسط  $(x+y+z)^n$  با فرض این که  $n$  عدد صحیح مثبت و مخالف صفر و برابر  $a+b+c$  باشد مساوی است با:

$$\begin{aligned} \text{ضریب } x^a y^b z^c &= \frac{n!}{a!b!c!} \\ (\text{با فرض } a+b+c=n) \end{aligned}$$

مثال ۲۵ : مجموع تمام عددهایی به صورت

$$\frac{15!}{a! b! c! d!}$$

که در آن  $d, c, b, a$  روی تمام عددهای صحیح نامنفی تغییر می کنند و در شرط  $a+b+c+d=15$  صدق می کنند را بنویسید.

حل : مجموع اعداد برابر است با  $4^{15}$  زیرا اعداد دقیقاً ضریبهای بسط  $(x+y+z+t)^{15}$  می باشند.

مثال ۲۶ : به ازای چه مقدارهایی از  $n$ ، جمله  $x^5 y^2 z^n$  می تواند يك جمله از بسط  $(x+y+z)^{n^2-15n+70}$  باشد.

حل : شرط این که جمله ای از بسط فوق باشد این است که داشته باشیم:

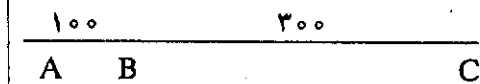
$$5+2+n=n^2-15n+70$$

$$n^2-16n+63=0 \Rightarrow (n-7)(n-9)=0$$

$$\Rightarrow n=7 \text{ یا } n=9$$

تفصیل اندیشه ۳۳

A به فاصله ۱۰۰ متر از B و B به فاصله ۳۰۰ متر از C است. آنها با سرعت های ثابت به سمت راست حرکت می کنند. در ۶ دقیقه A، B را می گیرد، و در ۶ دقیقه بعد A، C را می گیرد. در چند دقیقه C، B را گرفته است؟



جواب در صفحه ۹۶

$$x^{12}y^7 \text{ ضرب } = \frac{19!}{12! 7! 0! 0!} = \frac{19!}{12! 7!}$$

$$(12+7+0+0=19)$$

$$x^4 y^2 z^3 t^{10} \text{ ضرب } = \frac{19!}{4! 2! 3! 10!}$$

$$(4+2+3+10=19)$$

مثال ۲۳ : ضرب  $xy^2 z^3 t^4 u^5 v^6 w^7$  در بسط  $(x+y+z+t+u+v+w)^{28}$

چيست؟

حل :

$$xy^2 z^3 t^4 u^5 v^6 w^7 \text{ ضرب } = \frac{28!}{1! 2! 3! 4! 5! 6! 7!}$$

$$(1+2+3+4+5+6+7=28)$$

مثال ۲۴ : مجموع ضرایب بسط

$$(x+y+z+t+w)^{100}$$

چند رقمی است  $(\log 2 = 0.301)$ .

حل : با اختیار کردن  $x=y=z=t=w=1$  داریم:

$(1+1+1+1+1)^{100}$  و در نتیجه مجموع ضرایب بسط فوق برابر  $5^{100}$  می شود که برای تعیین تعداد ارقام آن از لگاریتم استفاده می کنیم.

$$\log 5^{100} = 100 \log 5 = 100 \log \frac{10}{2}$$

یعنی:

$$= 100 (\log 10 - \log 2) = 100 (1 - 0.301)$$

$$= 100 (0.699) = 69.9 \Rightarrow$$

$$70 = 69 + 1 = \text{تعداد ارقام} + 1 = \text{مفسر}$$

پس ۷۰ رقمی است.