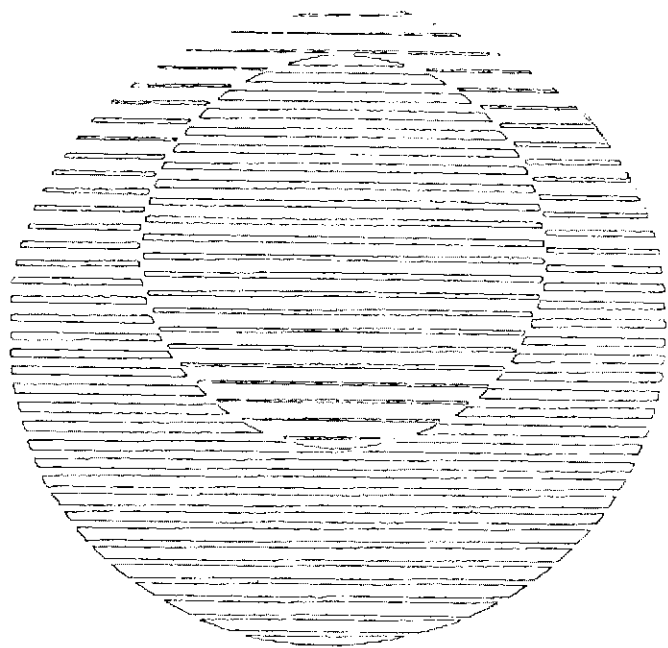




بررسی وضع دو دایره نسبت به هم

● محمد هاشم رستمی

۳ - مجموع شعاعهای این دو دایره را به دست آورید و با اندازه خط مرکزین آنها مقایسه کنید. کدام بیشتر است؟ در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

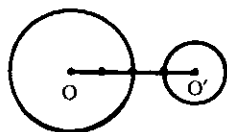
$$R + R' = \dots + \dots \quad OO' = d = \dots \quad d \dots R + R'$$

۴ - این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟

تعریف - دو دایره که اندازه خط مرکزین آنها از مجموع شعاعهایشان بیشتر باشد، دو دایره برون هم (متخارج)، نامیده می شوند.

در فعالیت ۱ دو دایره (C) و (C')، برون هم هستند. در مورد دو دایره برون هم می توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره (O و R) و (O' و R') برون هم (متخارج) باشند، آن است که اندازه خط مرکزین آنها ($d = OO'$) از مجموع شعاعهایشان ($R + R'$) بیشتر باشد.



$$d > R + R' \Leftrightarrow \text{دو دایره برون هم (متخارج)}$$

مثال ۱ - دو دایره (C و Q) و (O' و R') مفروضند.

به دلیل محدود بودن صفحه های کتابهای درسی، امکان شرح و بسط کافی برای همه مفهومیهای موجود در این کتابها وجود ندارد؛ از جمله این مفهومیها بررسی وضع دو دایره نسبت به هم است، که تنها در یک صفحه از کتاب هندسه سال دوم دبیرستان رشته های ریاضی فیزیک و علوم تجربی نظام جدید آموزشی (صفحه ۵۲) به صورت خلاصه آمده است. چون وضع دو دایره نسبت به هم، کاربردهای فراوانی در هندسه دارد، لذا به ارائه آن به صورت مشروحتری پرداخته ایم، برای درک بهتر مطلب:

۱ - این مفهوم به صورت فعالیت ارائه شده است، تا دانش آموزان با انجام این فعالیتها خود به کشف رابطه های مربوط به وضع نسبی دو دایره بپردازند.

۲ - شعاعهای دو دایره ثابت نگاه داشته شده و اندازه خط مرکزین آنها تغییر یافته است.

نکته - در اینجا نیز از اثبات برخی مطالب که نیاز به اطلاعات بیشتری دارد خودداری شده است.

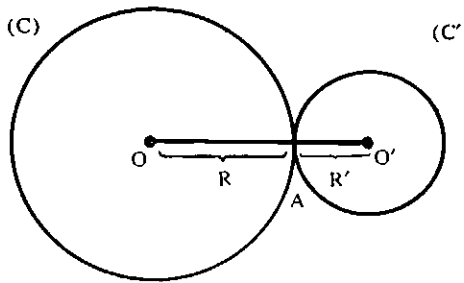
فعالیت ۱

۱ - پاره خط OO' را به طول ۴ سانتی متر رسم کنید.

۲ - یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر (دایره C)، و دایره دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی متر رسم نمایید (دایره C').

در فعالیت ۲ دو دایره مماس برون هستند.
در مورد دو دایره مماس برون به طور کلی می توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره (O و R) و C (O' و R') مماس برون (مماس خارج) باشند، آن است که اندازه خط‌المركزين آنها (d) مساوی مجموع شعاعهايشان (R + R') باشد.



$d = R + R'$ $\Leftrightarrow$ دو دایره مماس برون (مماس خارج)

مثال ۱- اگر دو دایره (O و ۵) و (O' و ۸) مماس برون باشند، اندازه خط‌المركزين آنها چه قدر است.
حل- شرط آن که دو دایره، مماس برون باشند، آن است که اندازه خط‌المركزين آنها برابر مجموع شعاعهای دو دایره باشد.
بنابراین داریم:

$$d = OO' = R + R' \Rightarrow OO' = 5 + 8 = 13$$

مثال ۲- مقدار R را چنان بیابید که دو دایره (O و C) و (O' و ۷) مماس برون باشند، در صورتی که $OO' = 18$ باشد.

حل- با فرض $OO' = d$ داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 18 = R + 7 \Rightarrow R = 11$$

مثال ۳- مقدار m را چنان تعیین کنید که دو دایره به شعاعهای $R = m + 2$ ، $R' = m - 2$ با خط‌المركزين $OO' = 3m - 12$ مماس برون باشند.

حل- با شرط این که نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، مقدار قابل قبول برای m عبارت است از:

$$\begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ m - 2 \geq 0 \\ 3m - 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \geq 2 \\ m > 4 \end{cases} \Rightarrow m > 4$$

اگر $OO' = 14$ باشد، حدود R' را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل- اگر نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، نخست باید $R' \geq 0$ باشد، آن گاه برای این که دو دایره برون هم باشند، لازم و کافی است، $d > R + R'$ باشد.

$$14 > 6 + R' \Rightarrow R' < 8 \Rightarrow 0 \leq R' < 8$$

مثال ۲- دو دایره به شعاعهای $R = a + 3$ و $R' = 2a - 1$ و خط‌المركزين $OO' = d = a + 12$ داده شده‌اند. حدود a را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل- با در نظر گرفتن نقطه به عنوان دایره‌ای به شعاع صفر، نخست باید:

$$\begin{cases} a + 3 \geq 0 \\ 2a - 1 \geq 0 \\ a + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -3 \\ a \geq \frac{1}{2} \\ a > -12 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

از طرفی شرط برون هم بودن دو دایره آن است که $d > R + R'$ باشد، یعنی:

$$a + 12 > a + 3 + 2a - 1 \Rightarrow a < 5$$

بنابراین جواب مسأله $\frac{1}{2} \leq a < 5$ است.

فعالیت ۲

۱- پاره خط OO' را به طول ۲ سانتی متر رسم کنید.

۲- یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر (دایره C) و دایره دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی متر (دایره C') رسم نمایید.

۳- مجموع شعاعهای این دو دایره را به دست آورید و با اندازه خط‌المركزين آنها مقایسه کنید.

نتیجه مقایسه چیست؟

در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

$$R + R' = \dots + \dots \quad OO' = d = \dots \quad d \dots R + R'$$

۴- این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه مشترک چیست؟

تعریف- دو دایره که اندازه خط‌المركزينشان مساوی مجموع شعاعهايشان باشد، دو دایره مماس برون (مماس خارج) نامیده می شوند.

در مورد دو دایره متقاطع به طور کلی می توان گفت :

و شرط این که دو دایره مماس برون باشند آن است که :

$$d = R + R' \Rightarrow 3m - 12 = m + 2 + m - 2 \Rightarrow m = 12$$

پس جواب مسأله $m = 12$ است.

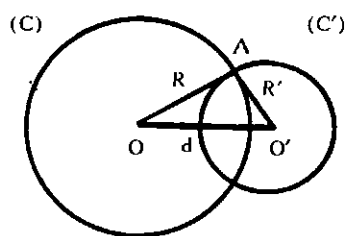
شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو دایره (R) و $C(O)$ و $R'(O')$ آن است که اندازه خط مرکزین آنها (d) از مجموع دو شعاع ($R + R'$)، کمتر و از قدر مطلق تفاضل دو شعاع ($|R - R'|$) بیشتر باشد.

فعالیت ۳

۱ - پاره خط OO' را به طول $2/5$ سانتی متر رسم کنید.

۲ - یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر (دایره C) و دایره دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی متر (دایره C') رسم کنید.

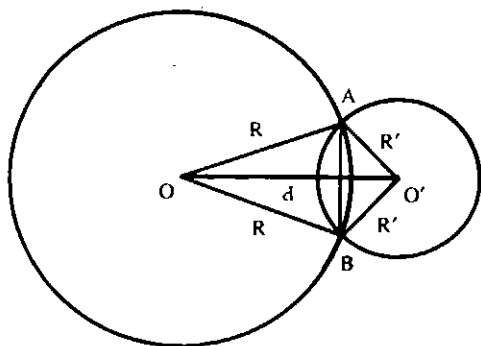
۳ - مجموع شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟



$$|R - R'| < d < R + R' \Leftrightarrow \text{دو دایره متقاطع}$$

زیرا با برقراری شرط بالا، همواره مثلث $OA O'$ که ضلعهای آن $OA = R$ ، $O'A = R'$ و $OO' = d$ است، وجود دارد.

نکته: اگر A و B نقطه های برخورد دو دایره متقاطع $C(O)$ و $C'(O')$ باشند، چهار ضلعی $OA O'B$ شبه لوزی است. (چرا؟). و در نتیجه OO' عمود منصف پاره خط AB است؛ یعنی در دو دایره متقاطع، خط مرکزین، عمود منصف وتر مشترک است.



مثال ۱ - اگر R و R' شعاعها و d خط مرکزین دو دایره باشد، تعیین کنید در کدام حالت از حالت های زیر دو دایره متقاطعند.

$$R = 4, R' = 7, d = 14$$

الف -

$$R = 8, R' = 4, d = 5$$

ب -

$$R + R' = \dots + \dots$$

قدر مطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟

$$|R - R'| = \dots$$

اندازه خط مرکزین این دو دایره را با مجموع و تفاضل شعاعهای دو دایره مقایسه کنید. چه نتیجه ای به دست می آید؟ جاهای خالی زیر را با عددها و علامتهای مناسب پر کنید.

$$R + R' = \dots + \dots \quad OO' = d = \dots \Rightarrow d \dots R + R'$$

$$|R - R'| = \dots - \dots \quad OO' = d = \dots \Rightarrow d \dots |R - R'|$$

$$\Rightarrow |R - R'| \dots d \dots R + R'$$

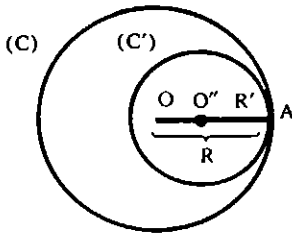
۴ - این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟ ... نقطه.

نقطه های مشترک این دو دایره را A و B بنامید.

پاره خط AB را وتر مشترک دو دایره و خط AB را خط شامل وتر مشترک دو دایره و با مسامحه، وتر مشترک دو دایره می نامند.

تعریف - دو دایره که اندازه خط مرکزینشان از مجموع شعاعهای دو دایره کمتر و از تفاضل شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشد، دو دایره متقاطع می نامند. در فعالیت ۳ دو دایره C و C' متقاطعند.

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره (O) و (C) و (O') و (C') مماس درون (مماس داخل) باشند، آن است که اندازه خط‌المركزین آنها (d) مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهایشان باشد. یعنی:



$$d = |R - R'| \Leftrightarrow \text{دو دایره مماس درون (مماس داخل)}$$

نکته: با فرض $R > R'$ می‌توان نوشت: $d = R - R'$.

مثال ۱ - مقدار R را چنان بیابید که دایره (O) و (C) با دایره (O') و (C') مماس درون باشد در صورتی که $OO' = ۱۵$ خط‌المركزین آنها باشد.

حل - داریم:

$$d = |R - R'| \Rightarrow ۱۵ = |R - ۹| \Rightarrow R = ۲۴$$

مثال ۲ - اگر $d = ۸$ خط‌المركزین و $R = a - ۳$ و $R' = ۲a - ۵$ شعاعهای دو دایره باشند، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره مماس درون باشند.

حل - اگر نقطه را دایره به شعاع صفر در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} 2a - 5 \geq 0 \\ a + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a \geq -3 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{5}{2}$$

$$d = |R - R'| \Rightarrow ۸ = |a - ۳ - 2a + ۵| \Rightarrow$$

$$۸ = |-a + ۲| \Rightarrow a = ۱۰, a = -۶ < ۰$$

جواب $a = -۶$ قابل قبول نیست.

فعالیت ۵

۱ - پاره خط OO' را به طول $۵/۰$ سانتی متر رسم کنید.

۲ - به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر یک دایره (C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی متر دایره دیگری (C') رسم کنید.

ب - $R = ۹, R' = ۳, d = ۱۲$

ت - $R = ۶, R' = ۵, d = ۱۲$

حل - در حالت الف، دو دایره برون هم هستند؛ زیرا $۱۴ > ۴ + ۷$ یعنی $d > R + R'$ است. در حالت ب، دو دایره متقاطعند؛ زیرا $۸ < ۴ < ۵ < ۸ + ۴$ یعنی $|R - R'| < d < R + R'$ است. در حالت پ، دو دایره مماس برون می‌باشند چون $۱۲ = ۹ + ۳$ یعنی $d = R + R'$ است. در حالت ت، دو دایره برون هم هستند، زیرا $۱۲ > ۶ + ۵$ یعنی $d > R + R'$ است.

مثال ۲ - اگر $d = ۱۲$ خط‌المركزین دو دایره (O) و (C) و (O') و (C') باشد، حدود R' را چنان بیابید که این دو دایره متقاطع باشند.

حل - شرط متقاطع بودن دو دایره را نوشته به جای d و R مقدارهای داده شده را قرار می‌دهیم.

$$|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow |۷ - R'| < ۱۲ < ۷ + R' \\ \Rightarrow ۸ < R' < ۲۲$$

فعالیت ۴

۱ - پاره خط OO' را به طول ۱ سانتی متر رسم کنید.

۲ - به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر یک دایره (C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی متر دایره دیگری (C') را رسم کنید.

۳ - قدرمطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟ آیا اندازه خط‌المركزین این دو دایره با قدرمطلق تفاضل شعاعهای آنها برابر است؟

جاهای خالی را با عددها و علامت مناسب پر کنید.

$$|R - R'| = \dots \quad OO' = d = \dots \quad d \dots |R - R'|$$

۴ - این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه چیست؟

تعریف - دو دایره که اندازه خط‌المركزینشان مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره باشد، دو دایره مماس درون (مماس داخل) نامیده می‌شوند، در فعالیت ۴ دایره (C) و (C') مماس درون هستند.

در مورد دو دایره مماس در حالت کلی می‌توان گفت:

مثال ۲- دایره‌های (O) و (O') با $C(O)$ و $C(O')$ خط‌المركزين $OO' = 3$ داده شده‌اند. حدود m را چنان بیابید که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشد.

حل - داریم:

$$d < |R - R'| \Rightarrow 3 < |2m - 1 - 2| \Rightarrow 3 < |2m - 3|$$

$$\Rightarrow m > 3 \text{ و } m < 0$$

$m < 0$ غیر قابل قبول است زیرا شرط حقیقی بودن R آن است، که

$$2m - 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{m \geq \frac{1}{2}}$$

فعالیت ۶

۱- یک نقطه مانند O در نظر بگیرید.

۲- به مرکز نقطه O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایره C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایره دیگری (دایره C') رسم کنید.

۳- اندازه خط‌المركزين این دو دایره چه قدر است؟

۴- این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟

تعریف - دو دایره که اندازه خط‌المركزينشان برابر صفر باشد، یعنی مرکزهایشان برهم منطبق باشند، دو دایره هم مرکز نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۶ دو دایره هم مرکز هستند.

در مورد دو دایره هم مرکز می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره هم مرکز باشند آن است که اندازه خط‌المركزينشان برابر صفر باشد.

تمرین

دو دایره (O) و (O') داده شده‌اند. تعیین

کنید که در چه حالتی دو دایره:

الف - غیر متقاطع‌اند.

ب - مماس‌اند.

پ - متقاطع‌اند.

۳- تفاضل شعاعهای این دو دایره را تعیین کنید.

آیا اندازه خط‌المركزين این دو دایره از تفاضل شعاعهای دو دایره کمتر است؟

در جاهای خالی عددها و علامت مناسب بگذارید.

$$R - R' = \dots \quad OO' = d = \dots \quad d \dots R - R'$$

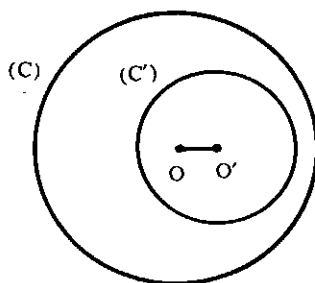
۴- آیا این دو دایره، نقطه مشترک دارند؟

تعریف - دو دایره که اندازه خط‌المركزينشان کمتر از قدر مطلق تفاضل شعاعهایشان باشد، دو دایره متداخل نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۵ دو دایره، متداخل هستند.

در مورد دو دایره متداخل در حالت کلی می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره (O) و (O') یکی درون دیگری (متداخل) باشند، آن است که اندازه خط‌المركزين آنها (d) از تفاضل شعاعهای دو دایره $(R - R')$ کمتر باشد.



یعنی: $d < R - R' \Leftrightarrow$ دو دایره درون هم (متداخل)

مثال ۱- پاره خط OO' به طول ۶ سانتی‌متر خط‌المركزين دو دایره است که شعاع یکی از آنها $R = 8$ سانتی‌متر است. حدود R' شعاع دیگری را چنان تعیین کنید، که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشند.

حل - داریم:

$$d < |R - R'| \Rightarrow 6 < |8 - R'|$$

$$\Rightarrow R' < 2 \text{ و } 6 < R' - 8 \Rightarrow R' > 14$$