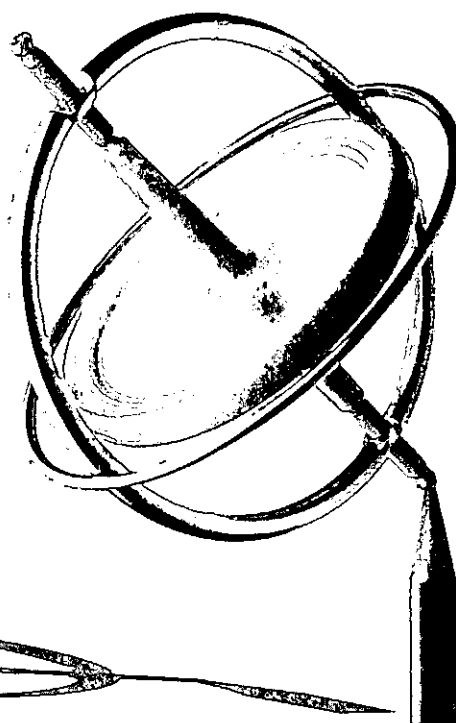


بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

(قسمت دوم)

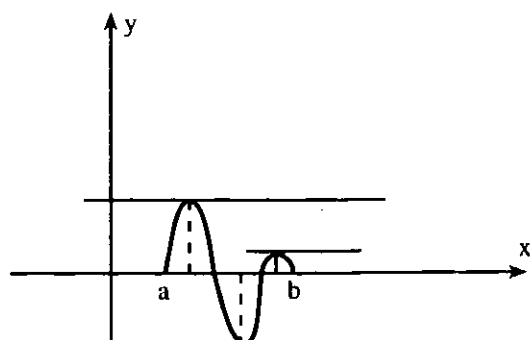
• محمد صادق عسگری



دارد. بنابراین، حداقل یکی از اکسترم‌های نسبی این تابع در نقاط داخلی فاصله $[a, b]$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم $a < c < b$ طول نقطه اکسترم نسبی f باشد. بنابر قضیه ماکزیم و می‌نیم نسبی، داریم $f'(c) = 0$.

تعبیر هندسی قضیه

اگر تابع f در شرایط قضیه رول صدق کند، آن‌گاه نقطه‌ای به طول $a < c < b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس در این نقطه موازی محور طولهاست.



پس از بررسی و کاربردهای قضیه ماکزیم و می‌نیم نسبی در برهان ۲۷ نوبت به بررسی قضیه رول می‌رسد. که صورت آن به شکل زیر است.

قضیه رول

فرض کنیم تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، آن‌گاه وجود دارد $a < c < b$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$.

اثبات

اگر f تابع ثابت باشد، آن‌گاه حکم قضیه برقرار است. بنابراین، فرض کنیم f تابع غیر ثابت باشد. بنا به فرض داریم $f(a) = f(b) = 0$ ، در نتیجه، وجود دارد $a < x < b$ ؛ به طوری که $f(x) \neq 0$. همچنین f بر $[a, b]$ پیوسته است. در نتیجه، بنابر قضیه ماکزیم و می‌نیم توابع پیوسته، f مقادیر ماکزیم و می‌نیم خود را بر این فاصله اختیار می‌کند؛ چون f مقادیر مخالف صفر

نتیجه ۱
قضیه رول را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد :
«اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ ، آنگاه وجود دارد $a < c < b$:
به طوری که $f'(c) = 0$.

مثال ۱۴ : برای توابع زیر روی بازه های داده شده، شرایط قضیه رول را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقاطی را که در آنها مشتق صفر است، بیابید.

الف : $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ روی بازه $[0, 4\pi]$.

حل : شرایط پیوستگی و مشتق پذیری f بر فاصله $[0, 4\pi]$ ، با توجه به پیوستگی و مشتق پذیری توابع سینوس و کسینوس روی این فاصله برقرار است و $f(0) = f(4\pi) = 0$ بنابر قضیه رول وجود دارد $0 < c < 4\pi$: به طوری که $f'(c) = 0$ ، برای پیدا کردن نقاط داریم :

$$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f'(c) = \cos c - \sin c = 0$$

$$\Rightarrow \cos c = \sin c \Rightarrow \operatorname{tg} c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$

ب : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$ روی بازه $[1, 4]$.

حل : تابع f روی فاصله $[1, 4]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(1) = 0$ و $f(4) = 3$ ، در نتیجه $f(1) \neq f(4)$ ؛ یعنی تابع f روی بازه $[1, 4]$ در شرایط قضیه رول صدق نمی کند. در صورتی که با یک محاسبه ساده، می توان وجود نقطه ای به طول $\frac{1}{3}$ در فاصله $[1, 4]$ را نشان داد که $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

ج : $f(x) = x^3 + 3x + 2$ روی بازه $[0, 1]$.

حل : تابع f روی فاصله $[0, 1]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(0) = 2$ و $f(1) = 6$ ، در نتیجه $f(0) \neq f(1)$ ؛ یعنی شرایط قضیه رول برای تابع f برقرار نیست. همچنین برای هر $0 < x < 1$ ، داریم $f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$.

د : $f(x) = 2\sqrt{x^2}$ روی بازه $[-1, 1]$.

تابع f در نقطه ای به طول $x = 0$ از این بازه پیوسته است؛ ولی مشتق پذیر نیست و $f(-1) = f(1) = 2$ ؛ یعنی شرط مشتق پذیری قضیه رول برقرار نیست. همچنین برای هر $-1 < x < 1$ ، داریم $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \neq 0$.

توابع فوق در این مثال، اهمیت برقراری شرایط قضیه رول را نشان می دهند.

اثبات

فرض کنیم $f(a) = f(b) = k$ ، در این صورت تابع $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x) - k$ را در نظر می گیریم. بنا به فرض، تابع g بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر است و داریم :

$$g(a) = f(a) - k = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - k = f(b) - f(b) = 0$$

در نتیجه، بنابر قضیه رول، وجود دارد $a < c < b$: به طوری که $g'(c) = 0$ ؛ چون $g'(x) = f'(x)$ ، پس $f'(c) = 0$.

تذکر

اگر در صورت قضیه رول، فقط مشتق پذیر بودن تابع f قید می شد، پیوسته بودن این تابع را می توانستیم نتیجه بگیریم؛ زیرا طبق قضیه، اگر تابعی در یک نقطه، مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

نتیجه ۲ (رابطه بین قضیه رول و قضیه بولتزانو)

اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر باشد و داشته باشیم : (۱) $f(a)f(b) < 0$ ، (۲) به ازای هر $a < x < b$ ، $f'(x) \neq 0$ ، آنگاه معادله $f(x) = 0$ در فاصله $]a, b[$ یک ریشه منحصر بفرد دارد.

اثبات

از شرط $f(a)f(b) < 0$ و قضیه بولتزانو نتیجه می شود معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در فاصله $]a, b[$ دارد. ثابت می کنیم که این معادله فقط یک ریشه دارد (برهان خلف). فرض کنیم $a < c_1 < c_2 < b$ دو ریشه از معادله $f(x) = 0$ باشند؛ در نتیجه $f(c_1) = f(c_2) = 0$. چون $[c_1, c_2] \subset]a, b[$ ، پس f بر فاصله $[c_1, c_2]$ پیوسته و مشتق پذیر است. طبق قضیه رول وجود دارد :

ریشه در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ دارد.

مثال ۱۹: فرض کنید: $0 < a < b$ و f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازه $[a, b]$ و مشتق پذیر بر بازه $[a, b]$ باشد. اگر $f(a) = a$ و $f(b) = b$ ، آن گاه ثابت کنید نقطه‌ای به طول $a < c < b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $f(c)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.

حل: تابع جدید $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر است و

$$g(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1, \quad g(b) = \frac{f(b)}{b} = \frac{b}{b} = 1$$

یعنی تابع g روی بازه $[a, b]$ در شرایط قضیه رول صدق می‌کند. در نتیجه، نقطه‌ای به طول $a < c < b$ هست؛ به طوری که $g'(c) = 0$.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow cf'(c) - f(c) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c} \quad (\text{ضریب زاویه خط مماس})$$

معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $f(c)$ را می‌نویسیم:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$\Rightarrow y - f(c) = \frac{f(c)}{c}(x - c)$$

$$\Rightarrow y - f(c) = \frac{f(c)}{c}x - f(c)$$

$$\Rightarrow y = \frac{f(c)}{c}x$$

این خط مماس، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

مثال ۲۰: ثابت کنید هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود، حداکثر دو ریشه دارد.

مثال ۱۵: ثابت کنید معادله $x^5 + 4x - 1 = 0$ در بازه $[-2, 2]$

فقط یک ریشه دارد.

حل: قرار می‌دهیم $f(x) = x^5 + 4x - 1$. تابع f روی بازه

$[-2, 2]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(-2)f(2) = -1599 < 0$ (۱)

(۲) برای هر $2 < x < -2$ ، داریم $f'(x) = 5x^4 + 4 \neq 0$. بنابراین،

طبق نتیجه (۲) معادله $x^5 + 4x - 1 = 0$ فقط یک ریشه در فاصله $[-2, 2]$ دارد.

مثال ۱۶: ثابت کنید معادله $x + e^x + 2 = 0$ ، فقط یک ریشه

حقیقی دارد.

حل: قرار می‌دهیم $f(x) = x + e^x + 2$. تابع f روی $\mathbb{R}$ ،

پیوسته و مشتق پذیر است و به علاوه (۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(۲) برای هر x ، $f'(x) = 1 + e^x \neq 0$ ، پس طبق نتیجه (۲)

معادله $x + e^x + 2 = 0$ فقط یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱۷: نشان دهید برای هر عدد $a > 1$ عدد حقیقی یکتای

b وجود دارد که $b = \sqrt[n]{a}$.

حل: تابع پیوسته و مشتق پذیر $f(x) = x^n - a$ را روی بازه

$[1, +\infty[$ در نظر می‌گیریم؛ اولاً $f(1) = 1 - a < 0$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثانیاً برای هر $x > 1$ ، داریم

$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$. در نتیجه، طبق نتیجه (۲)، معادله

$x^n - a = 0$ فقط یک ریشه بزرگتر از یک دارد؛ یعنی عدد حقیقی

ویکتای $b > 1$ وجود دارد؛ به طوری که $b^n - a = 0$ یا $b^n = a$ ،

یعنی $b = \sqrt[n]{a}$.

مثال ۱۸: ثابت کنید معادله $\cos x - 3x - x^3 = 0$ فقط یک

ریشه در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ دارد.

حل: تابع پیوسته و مشتق پذیر $f(x) = \cos x - 3x - x^3$ را

روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ در نظر می‌گیریم؛ اولاً $f(0) = 1 > 0$ و

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi^3}{8} < 0$ ، ثانیاً برای هر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، داریم

$f'(x) = -\sin x - 3 - 3x^2 < 0$.

پس طبق نتیجه (۲) معادله $\cos x - 3x - x^3 = 0$ ، فقط یک



ادب ریاضی

ابوالحسن ثابت بن قُره، از مردم حرّان، واقع در بین النهرین، حدود سال ۲۲۱ هجری تولد و به سال ۲۸۸ هجری وفات یافت. در جوانی در حرّان به شغل صراف‌ی اشتغال داشت. هنگامی که محمد بن موسی بن شاکر (یکی از سه برادر مشهور به بنو موسی) از وقوف او بر زبانهای عربی و یونانی آگاه گردید، او را با خود به بغداد برد. وی تحت تعلیم و هدایت بنو موسی، به تحصیل ریاضیات، نجوم و طب ادامه داد و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان و مترجمان عصر خود گردید. ثابت از نخستین کسانی است که در هیأت بظلمیوس دخالت کردند. وی برای آن که حرکت اقبال و ادبار اعتدالین را توجیه کند، فلک نهیمی بر هشت فلک بظلمیوسی افزود. آثار ریاضی ثابت، نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات دوره اسلامی داشته است. نوشته‌های وی، راه را برای اکتشافهای بعدی مانند تعمیم مفهوم عدد صحیح به اعداد حقیقی مثبت، حساب و انتگرال، مثلثات کروی و جز اینها هموار کرد. طریقه وی در تعیین مساحت سهمی و حجم سهمیوار، بسیار جالب است.

زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی — ابوالقاسم

قربانی

حل: فرض کنیم معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای سه ریشه x_1 و x_2 و x_3 باشد. در نتیجه، برای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. تابع f روی بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ در شرایط قضیه رول صدق می‌کند. بنابراین، نقاط $x_1 < c_1 < x_2$ و $x_2 < c_2 < x_3$ وجود دارند؛ به طوری که $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$ ، یعنی c_1 و c_2 دو ریشه معادله $f'(x) = 0$ هستند. این تناقض است؛ زیرا معادله $f'(x) = 2ax + b = 0$ یک معادله درجه اول است، که همواره یک ریشه دارد.

مثال ۲۱: ثابت کنید هر معادله درجه n ،

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

همواره یک ریشه مثبت دارد.

حل: قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$$

تابع f روی بازه $[0, 1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f(0) = 0$ و

$$f(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

در نتیجه، طبق قضیه رول، وجود دارد $0 < c < 1$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0$$

یعنی $0 < c < 1$ یک ریشه معادله $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ می‌باشد.

• یکی از نتایج مهم قضیه رول، قضیه مقدار میانگین است. در شماره بعد به بررسی کامل این قضیه می‌پردازیم و سپس طرز استفاده از قضیه را در حل مسائل، به کمک مثال، نشان می‌دهیم.

