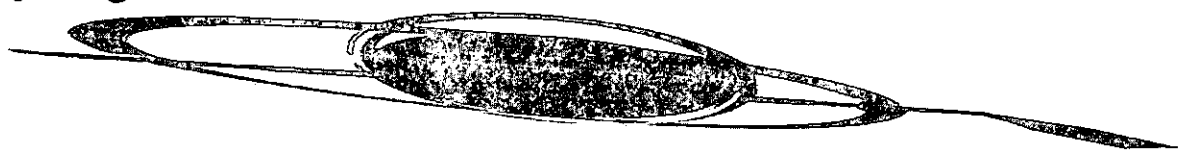
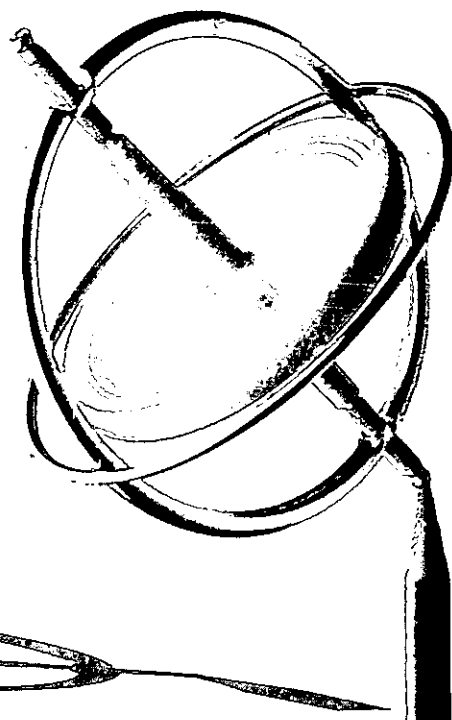


بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

• محمد صادق عسگری



$(c - \delta, c + \delta)$ از نقطه $x = c$ موجود باشد؛ به طوری که برای هر $t \in (c - \delta, c + \delta)$ داشته باشیم $f(t) \leq f(c)$ و $f(t) \geq f(c)$. مقدار $f(c)$ را ماکزیمم نسبی (می نیمم نسبی) تابع f می گویند. به علاوه ماکزیمم و می نیمم نسبی تابع f را، اکسترمم های نسبی تابع f نیز می گویند.

قضیه ماکزیمم و می نیمم نسبی توابع حقیقی

فرض کنیم تابع حقیقی f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و در نقطه داخلی $x = c$ از این فاصله $(a < c < b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد؛ در این صورت، اگر f در $x = c$ مشتق پذیر باشد، آن گاه $f'(c) = 0$.

اثبات: بنا به فرض تابع f در $x = c$ دارای ماکزیمم نسبی (می نیمم نسبی) است. بنابراین، همسایگی $(c - \delta, c + \delta)$ وجود دارد؛ به طوری که برای هر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ داریم:

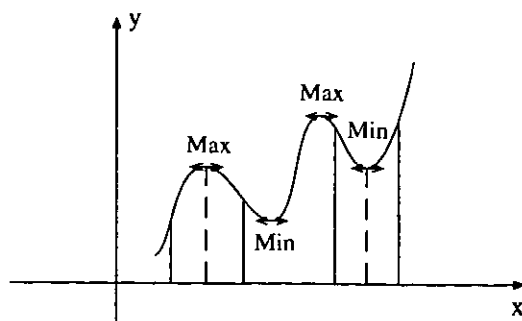
$$(*) \quad (f(x) \geq f(c)) f(x) \leq f(c)$$

ادامه اثبات را برای ماکزیمم نسبی بیان می کنیم، برای حالت می نیمم نسبی به طور مشابه برقرار است؛ چون f در $x = c$

در ادامه بررسی قضیه های پیوستگی «فضایای مقدار میانی - بولزانو - ماکزیمم و می نیمم مطلق» به بررسی قضیه های کاربرد مشتق می پردازیم که عبارتند از: ۱- قضیه ماکزیمم و می نیمم نسبی ۲- قضیه رول ۳- قضیه مقدار میانگین. بدیهی است که خواننده باید با تعریف مشتق و روشهای مشتق گیری، آشنایی داشته باشد.

تعریف اکسترمم نسبی توابع حقیقی

نقطه ای به طول $x = c$ از دامنه تابع حقیقی f را طول نقطه ماکزیمم نسبی (می نیمم نسبی) f می گویم؛ هرگاه همسایگی



بر نمودار تابع در این نقطه، صفر است. به عبارت دیگر، خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، موازی محور طولهاست.

مشتق پذیر است، بنابراین :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (**)$$

دو حالت (۱) $x \rightarrow c^+$ (۲) $x \rightarrow c^-$ را در نظر می گیریم.
(۱) اگر $x \rightarrow c^+$ آن گاه $x \geq c$ ، بنابراین (*) $f(x) \leq f(c)$

بنابراین $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ ، در نتیجه داریم :

$$f'(c) \leq 0 \quad \text{یا} \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

(۲) اگر $x \rightarrow c^-$ آن گاه $x \leq c$ ، بنابراین (*) $f(x) \leq f(c)$

بنابراین $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ ، در نتیجه داریم :

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{یا} \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

بنابر روابط (۱) و (۲) داریم : $f'(c) = 0$.

نتیجه های قضیه های ماکزیم و می نیم نسبی

نتیجه ۱: اگر تابع f در نقطه داخلی $x = c$ از دامنه اش دارای اکسترم نسبی باشد، آن گاه یا f در این نقطه، مشتق پذیر نیست یا $f'(c) = 0$.

این نتیجه، یک شرط لازم را برای طول نقاط اکسترم نسبی بیان می کند: زیرا تابع $f(x) = x^3$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است و به علاوه $f'(0) = 0$ در صورتی که تابع f در $x = 0$ دارای اکسترم نسبی نیست. بنابراین، برای پیدا کردن طول نقاط اکسترم نسبی تابع f با استفاده از این نتیجه، می توان در دامنه تابع به دنبال ریشه های مشتق یا نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق پذیر نیست. این نقاط در صورتی اکسترم های نسبی هستند که مشتق تابع، یعنی $f'(x)$ ، در این نقاط تغییر علامت دهد. چون در تابع $f(x) = x^3$ ، داریم $f'(x) = 3x^2$ ، در نتیجه، مشتق تابع در $x = 0$ تغییر علامت نمی دهد؛ بنابراین تابع در $x = 0$ اکسترم نسبی ندارد.

نتیجه ۲: اگر تابع f در نقطه داخلی $x = c$ از دامنه اش دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد و به علاوه $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ آن گاه نقطه $x = c$ طول نقطه ماکزیم نسبی و اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ ، آن گاه نقطه $x = c$ طول نقطه می نیم نسبی تابع است. در حالتی که $f''(c) = f'(c) = 0$ در مورد نقطه $x = c$ حکمی نمی توان داد.

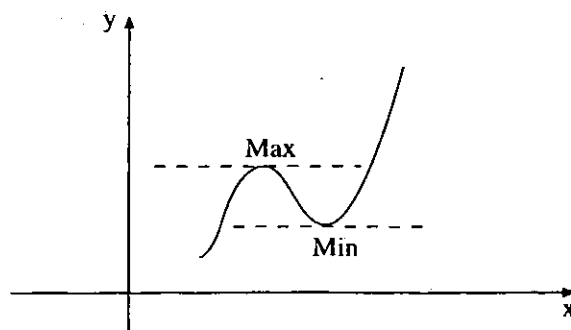
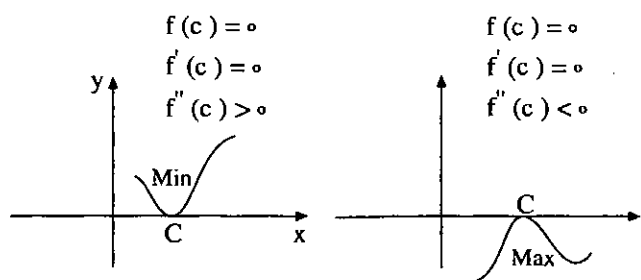
نتیجه ۳: اگر تابع f در نقطه داخلی $x = c$ از دامنه اش دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد و به علاوه $f(c) = f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ ، آن گاه نمودار تابع f در $x = c$ دارای ماکزیم نسبی و اگر $f(c) = f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ ، آن گاه f در این نقطه، دارای می نیم نسبی است. به علاوه، در این دو حالت، نمودار تابع بر محور طولها مماس است.

تعبیر هندسی قضیه ماکزیم و می نیم نسبی

اگر تابع حقیقی f در نقطه $x = c$ مشتق پذیر باشد، آن گاه در این نقطه، یک خط مماس منحصر به فرد می توان بر نمودار تابع رسم کرد، که ضریب زاویه آن، برابر با مقدار مشتق تابع f در نقطه $x = c$ است؛ یعنی :

$$f'(c) = \text{ضریب زاویه خط مماس در نقطه } x = c$$

با توجه به نکته بالا، قضیه ماکزیم و می نیم نسبی، می تواند بیان دیگری از این مطلب باشد. پس اگر تابع f در نقطه $x = c$ از دامنه تابع دارای اکسترم نسبی و به علاوه، در این نقطه، مشتق پذیر باشد، در این صورت $f'(c) = 0$ ، یعنی: ضریب زاویه خط مماس



محور طولها باشد.

حل: این نقاط، ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \Rightarrow y' = \frac{1 + \cos x - \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + \cos x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = 1 \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه، این تابع در نقطه $A \left(\frac{\pi}{2} \right)$ دارای خط مماس موازی محور طولهاست.

به علاوه، چون $y \left(\frac{\pi}{2} \right) = y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$ ، بنابراین نمودار تابع در این نقطه، بر محور طولها مماس است.

مثال ۲: ضرایب a و b را در تابع باضابطه $y = ax^2 + bx^2 + 1$ بیابید؛ به طوری که نمودار تابع در نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، بر محور x ها مماس باشد.

حل: برای آن که نمودار تابع در این نقطه، بر محور x ها مماس باشد، باید داشته باشیم $f(1) = f'(1) = 0$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx^2 + 1 \\ f'(x) = 2ax + 2bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b + 1 = 0 \\ f'(1) = 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

مثال ۳: ضرایب a و b را در تابع باضابطه $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 2}$ بیابید؛ به طوری که نقطه $M \left(-1 \right)$ ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x = -1$ مشتق پذیر و دارای ماکزیمم نسبی است، در نتیجه اولاً $f'(-1) = 0$ ثانیاً مختصات نقطه $M \left(-1 \right)$ در

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f'(-1) = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 2}$$

نتیجه ۴: اگر تابع کسری با ضابطه $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه (x_0, y_0) دارای اکسترمم نسبی و مشتق پذیر باشد، در این صورت

$$y_0 = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

کسری، در صورتی که این توابع در این نقاط، مشتق پذیر باشند، در هویتنال تابع صدق می‌کند.

اثبات: بنابر قضیه ماکزیمم و می‌نیم نسبی داریم: $y'(x_0) = 0$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\Rightarrow y'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow y_0 = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

نتیجه ۵: اگر تابع حقیقی با ضابطه $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ در

نقطه (x_0, y_0) دارای اکسترمم نسبی باشد، آن گاه خط به معادله $y = y_0$ در این نقطه، بر نمودار تابع، مماس است، و به علاوه

$$\text{معادله } y_0 = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

بنابراین، برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطه

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

کنیم و آن را بر حسب x مرتب نماییم. سپس مبین این معادله را برابر صفر قرار دهیم. ریشه‌های حاصل از معادله $\Delta = 0$ ، اکسترمم‌های نسبی تابع فوق هستند.

مثال ۱: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$

فاصله $0 \leq x \leq 2\pi$ بیابید؛ به طوری که خط مماس در آنها، موازی

مثال ۵: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{x+3}$ بیابید؛ به طوری که خط مماس در آن نقاط، عمود بر خط $y+x=1$ باشند.

حل: باید ضریب زاویه خط مماس (m) و ضریب زاویه خط (m') در رابطه $mm' = -1$ صدق کنند. بنابراین داریم:

$$m = f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$$

$$m' = -\frac{1}{y}$$

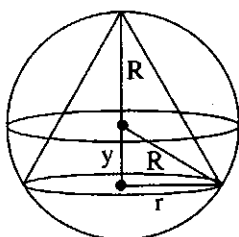
$$mm' = -1 \Rightarrow \frac{2}{(x+3)^2} \times \frac{-1}{y} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+3)^2} = 1 \Rightarrow (x+3)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x+3) = \pm 1 \Rightarrow x = -3 \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -5 \end{vmatrix} \\ A_2 \begin{vmatrix} -4 \\ 9 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

مثال ۶: می خواهیم یک مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h را در یک کره به شعاع R محاط کنیم. شعاع r و ارتفاع h را حساب کنید؛ در صورتی که حجم مخروط ماکزیمم باشد. حل: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} R+y=h \\ y^2+r^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=y+R \\ r^2=R^2-y^2 \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - y^2)(y+R)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(R-y)(y+R)$$

برای یافتن طول نقاط ماکزیمم تابع حجم، باید معادله $V'_y = 0$ را حل کنیم:

$$y' = \frac{(2ax+b)(x+2) - (ax^2+bx+1)}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{a-b+1}{1} = 1 \\ \frac{(-2a+b)(1) - (a-b+1)}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ -2a+b-a+b-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ -3a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=-1$$

مثال ۴: ضرایب a و b را در تابع با ضابطه $y = a \sin x + b \cos x + 2$ بیابید؛ به طوری که نقطه

$$M \left(\frac{\pi}{3}, 2(1+\sqrt{3}) \right)$$

می نیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x = \frac{\pi}{3}$ مشتق پذیر و دارای می نیمم نسبی

است، در نتیجه: اولاً $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$ و ثانیاً مختصات نقطه M در

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{3}) = 2(1+\sqrt{3}) \\ f'(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$$

ضابطه تابع صدق می کند؛ یعنی:

$$y = a \sin x + b \cos x + 2$$

$$y' = a \cos x - b \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sin \frac{\pi}{3} + b \cos \frac{\pi}{3} + 2 = 2(1+\sqrt{3}) \\ a \cos(\frac{\pi}{3}) - b \sin(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{3} + b = 4\sqrt{3} \\ a - b\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^T + y^T - 2ay - 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow y^T - (2a + 4)y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow y_{Max} + y_{Min} = 2a + 4 = 8$$

$$\Rightarrow 2a + 4 = 8 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

مثال ۸: اکستریم‌های نسبی تابع با ضابطه $y = x \ln x + 1$ را بیابید.

حل: ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$y = x \ln x + 1 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$y' = \ln x + x \times \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 + \ln x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$\Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e} \quad M \left| \begin{array}{c} \frac{1}{e} \\ -\frac{1}{e} \end{array} \right.$$

برای آن که ماکزیمم یا می‌نیمم بودن نقطه M را بررسی کنیم، با استفاده از نتیجه (۲)، داریم:

$$y'' = \frac{1}{x} \quad y''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$$

چون $y'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ و $y''\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ ، بنابراین نقطه M ، نقطه می‌نیمم نسبی این تابع است.

مثال ۹: اکستریم‌های نسبی تابع با ضابطه $y = x|x+2|+1$ را بیابید.

حل: دامنه تابع برابر است با $D = \mathbb{R}$. برای تعیین اکستریم‌های نسبی این تابع، ابتدا تابع را بر حسب ضابطه‌هایش می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x+2|+1 = \begin{cases} x(x+2)+1 & x \geq -2 \\ -x(x+2)+1 & x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x \geq -2 \\ -x^2 - 2x + 1 & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x > -2 \\ -2x - 2 & x < -2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x = -2$ مشتق‌پذیر نیست؛ بنابراین با تعیین علامت مشتق، اکستریم‌های نسبی را می‌یابیم:

$$V' = -\frac{\pi}{3}(y+R)^T + \frac{2\pi}{3}(R-y)(y+R) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}(y+R)(-y-R+2R-2y) = 0$$

$$\Rightarrow y+R=0, -3y+R=0$$

$$\Rightarrow y = -R \text{ قابل قبول}, y = \frac{R}{3} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\Rightarrow h = y + R \Rightarrow h = \frac{4R}{3}$$

$$r^T = R^T - y^T \Rightarrow r^T = R^T - \frac{R^T}{9} \Rightarrow r^T = \frac{8R^T}{9}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۷: ضرایب a و b را در تابع با ضابطه $y = \frac{x^T + ax + 3}{x+b}$ بیابید؛ به طوری که مختصات نقاط اکستریم تابع در روابط $y_{Max} + y_{Min} = 8$ و $x_{Min} + x_{Max} = 2$ صدق کنند.

حل: بنابر قضیه ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، طول نقاط اکستریم نسبی، تابع ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ می‌باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = \frac{x^T + ax + 3}{x+b}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+a)(x+b) - (x^T + ax + 3)}{(x+b)^T}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (2x+a)(x+b) - x^T - ax - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^T + 2bx + ax + ab - x^T - ax - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^T + 2bx + ab - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{Max} + x_{Min} = -2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

برای محاسبه اکستریم‌های نسبی این تابع داریم:

$$y = \frac{x^T + ax + 3}{x+b} \Rightarrow y = \frac{x^T + ax + 3}{x-1}$$

$$\Rightarrow y(x-1) = x^T + ax + 3 \Rightarrow yx - y = x^T + ax + 3$$

$$\Rightarrow x^T + (a-y)x + y + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (a-y)^T - 4(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}, y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

چون تابع از مرتبه اول و دوم مشتق پذیر است و به علاوه

$$M \begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{vmatrix} \quad y'' = 2a \text{ در نتیجه، نقطه}$$

است. اگر $a > 0$ نقطه M ، نقطه می نیمم نسبی، و اگر $a < 0$ ، آن گاه M ، نقطه ماکزیمم نسبی است.

مثال ۱۲: مقدار a را چنان بیاید که بین عرضهای نقاط

$$y_1 = 4y_2 \text{ رابطه } y = \frac{x^2 - 1}{ax^2 - 4x} \text{ ماکزیمم و می نیمم تابع با ضابطه}$$

حل: بنابر نتیجه (۵) برای تعیین عرضهای نقاط اکسترمم نسبی تابع داریم:

$$y = \frac{x^2 - 1}{ax^2 - 4x} \Rightarrow ax^2 - 4yx = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow (ay - 1)x^2 - 4yx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 4y^2 - (ay - 1) = 0 \Rightarrow 4y^2 - ay + 1 = 0$$

y_1 و y_2 ریشه های معادله بالا هستند. می خواهیم رابطه

$y_1 = 4y_2$ بین y_1 و y_2 برقرار باشد، بنابراین داریم:

$$y_1 = 4y_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = 5y_2 \Rightarrow 5y_2 = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{a}{20}$$

$$4y^2 - ay + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4a^2}{400} - \frac{a^2}{20} + 1 = 0$$

$$\frac{a^2}{100} - \frac{a^2}{20} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 5a^2}{100} = -1 \Rightarrow -4a^2 = -100$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

(ادامه دارد)



قابل قبول

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -2, & 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x < -2, & -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول

$$f'_+(-2) = -2, f'_-(-2) = 2$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
y'	+		-	+
y		↗	↘	↗
		Max	Min	

$$\text{بنابراین: } \text{Max} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right| \text{ و } \text{Min} \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right|$$

$$\text{مثال ۱۰: اکسترمم های نسبی تابع با ضابطه } y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$$

را بیاید:

حل: دامنه تابع برابر با $D_f = \mathbb{R}$ با استفاده از نتیجه (۵)

اکسترمم های نسبی را می یابیم:

$$y = \frac{x}{x^2 - x + 1} \Rightarrow yx^2 - yx + y = x$$

$$\Rightarrow yx^2 - (y+1)x + y = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$(y+1)^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow (y+1)^2 = 4y^2$$

$$\Rightarrow y+1 = \pm 2y$$

$$\Rightarrow y+1 = 2y \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow y+1 = -2y \Rightarrow 3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$y_{\text{Max}} = 1, y_{\text{Min}} = -\frac{1}{3}$$

مثال ۱۱: اکسترمم های نسبی تابع با ضابطه

$y = ax^2 + bx + c$ را بیاید.

حل: دامنه تابع برابر با $D_f = \mathbb{R}$ برای محاسبه اکسترمم های نسبی

داریم:

$$y' = 2ax + b \Rightarrow y' = 0$$