

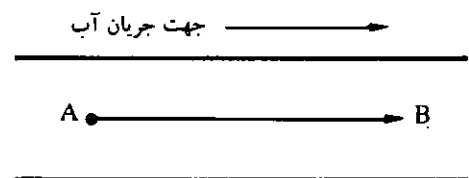
بردارها

(قسمت اول)

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

● مفهوم بردار

قایق کوچکی را در نقطه‌ای مانند: A از یک رودخانه پرآبی بدون حرکت در نظر می‌گیریم. حال اگر تصور کنیم که این قایق از نقطه A فقط در اثر جریان آب شروع به حرکت کند و در نقطه‌ای دیگر مانند B متوقف شود، در اصطلاح مسافت طی شده AB را که دارای اندازه و استداد و جهت است را یک بردار می‌نامیم.



برای اینکه نشان دهیم یک پاره‌خط جهت‌دار است یک پیکان در بالای پاره‌خط مفروض قرار می‌دهیم. مانند: بردار $\vec{AB}$ ؛ که نشان - دهنده پاره‌خطی جهت‌دار از A به B و به اندازه $|\vec{AB}|$ است.

بنابراین بدیهی است که یک پاره‌خط جهت‌دار است؛ هرگاه یک سر آن به عنوان ابتدا (نقطه شروع یا مبدأ) و سر دیگرش به عنوان انتها (نقطه پایان یا مقصد) در نظر گرفته شود.

برای درک بیشتر بردار می‌توان تأثیر یک یا چند نیرو روی یک جسم را نیز بیان کرد. مثلاً فرض کنید جسم ساکنی به وزن $\vec{W}$ را می‌خواهیم جابه‌جا کنیم. اگر چند نفر با نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ به این جسم در جهت و اندازه‌های مختلف اثر گذارند و مجموع یا

برآیند نیروهای وارده را $\vec{F}$ بنامیم؛ بدیهی است وقتی $\vec{F} > \vec{W}$ باشد، جسم حرکت خواهد کرد و در صورتی که $\vec{F} \leq \vec{W}$ باشد، جسم حالت سکون خود را حفظ خواهد کرد.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n > \vec{W}$$

شرط جابه‌جایی جسم: $\vec{F} > \vec{W}$ (بردار برآیند)

بنابراین وقتی درباره تأثیر یک نیرو روی یک جسم مطالعه می‌کنیم

باید:

(۱) نقطه اثر

(۲) اندازه

(۳) راستا یا استداد

آن نیرو را مشخص کنیم.

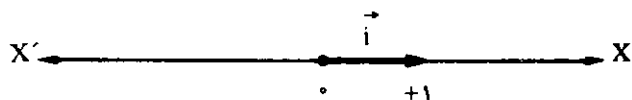
● طریقه‌های نشان دادن یک بردار و مؤلفه‌های آن روی دو محور عمود بر هم.

هرگاه A و B دو نقطه از صفحه باشند، پاره‌خط جهت‌دار AB را به صورت زوج مرتب (A,B) و یا به صورت $\langle A, B \rangle$ نشان می‌دهند.

هر نقطه $P(a,b)$ در صفحه یک و تنها یک بردار مثل: $\vec{OP}$ و برداری مانند: $\vec{OP}$ فقط و فقط یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند. بردار $\vec{OP}$ به نام بردار مکان نقطه P خوانده می‌شود.

صفر و پایانش بر ۱ + منطبق باشد، آن بردار را بردار یکانی (واحد) محور می‌نامیم.

هر محور فقط یک بردار واحد دارد مانند: بردار یکانی $\vec{i}$ برای محور $X'OX$ (مطابق شکل).



تجربیات فیزیکی نشان می‌دهند که:

اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ نیروهای وارد به یک نقطهٔ مادی (جرمی) متمرکز در یک نقطهٔ (فضا) مانند: P باشند، آنگاه روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 \quad (\text{شرکت پذیری})$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \quad (\text{جابجایی})$$

اگر نماد $\vec{O}$ نشان دهد که به P نیرویی وارد نمی‌شود، یا به عبارت دیگر به P، نیرویی معادل صفر وارد می‌شود، برای هر نیروی دیگر مؤثر بر P مانند $\vec{F}$ داریم:

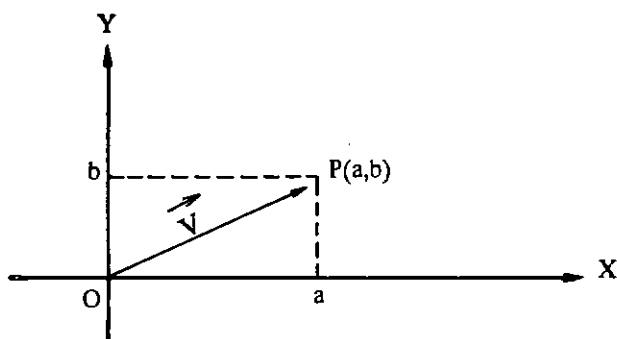
$$\vec{O} + \vec{F} = \vec{F} + \vec{O} = \vec{F} \quad (\text{عضو خنثی})$$

تجربه نشان می‌دهد که اگر نیروی $\vec{F}_1$ به P وارد شود و نیروی $\vec{F}_2$ که اندازه آن مساوی $\vec{F}_1$ ولی جهت آن برخلاف $\vec{F}_1$ است نیز روی P اثر گذارد، این دو نیرو یکدیگر را خنثی خواهند کرد. به عبارت دیگر، برای نیروی معین $\vec{F}$ نیرویی که با نماد $-\vec{F}$ نشان می‌دهیم وجود دارد به طوری که داریم:

$$\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{O} \quad (\text{عضو وارون})$$

$\vec{O}$ عضو بی‌اثر جمع و $-\vec{F}$ وارون $\vec{F}$ در مجموعهٔ بردارها نامیده می‌شوند. فرض کنیم نیروی $\vec{F}$ روی P تأثیر کند. اندازهٔ این نیرو را با علامت $|\vec{F}|$ نشان می‌دهیم. برای هر $k \in \mathbb{R}$ و $k \neq 0$ ، نیروی $k\vec{F}$ که بر P اثر می‌کند را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

اندازهٔ $k\vec{F}$ برابر $|\vec{F}|$ است. اگر $k > 0$ باشد، جهت $k\vec{F}$



بنابراین بردار $\vec{V}$ را که ابتدای آن O و انتهای آن نقطهٔ P(a, b) در صفحهٔ مختصات XOY است؛ بردار نظیر دو تایی مرتب (a, b) می‌نامند. اعداد a و b را مؤلفه‌های $\vec{OP} = \vec{V}$ می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$\vec{V} = \langle a, b \rangle, \text{ یا } \vec{V} \sim (a, b)$$

هر نقطه از صفحه مانند: P(a, b) را می‌توان با یک ماتریس 2×1 به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

در این صورت گفته می‌شود که $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یک بردار ستونی است.

همچنین مختصات نقطهٔ P را می‌توان با یک ماتریس سطری 1×2 به صورت $[a \ b]$ نیز نمایش داد، که در این صورت گفته می‌شود $\vec{OP}$ به طریق ماتریس سطری $[a \ b]$ نشان داده شده است:

$$\vec{OP} = [a \ b]$$

• بردار یکانی (واحد)

هر بردار به اندازهٔ واحد را یک بردار یکانی می‌نامند. اگر امتداد بردار یکانی $\vec{i}$ موازی خط Δ باشد، بردار $\vec{i}$ را بردار یکانی راستای Δ گوئیم.

هر راستای دو بردار یکانی دارد، مانند: بردارهای یکانی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برای راستای Δ (مطابق شکل).

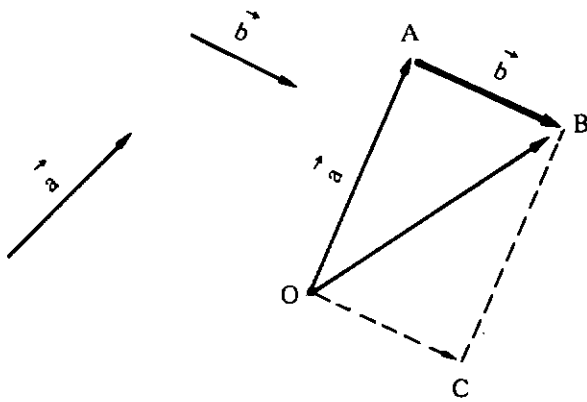


اگر یک بردار یکانی بر روی یک محور چنان باشد که آغازش بر

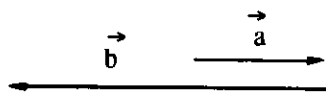
مطالعه قرار داد.

• جمع بردارها

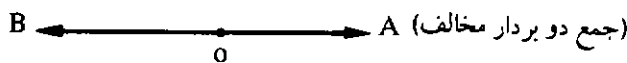
هرگاه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده باشند، از نقطه‌ای مانند: O بردار $\vec{OA}$ را برابر $\vec{a}$ و از نقطه A بردار $\vec{AB}$ را برابر $\vec{b}$ رسم می‌کنیم. بردار $\vec{OB}$ را مجموع هندسی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم. مجموع هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a} + \vec{b}$ نمایش می‌دهیم. در شکل زیر دیده می‌شود که اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همراستا نباشند OB قطر متوازی الاضلاع OABC است که بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OC}$ به ترتیب با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر هستند. در این حالت می‌گوییم که مجموع هندسی دو بردار قطر متوازی الاضلاع است که بر آن دو بردار بنا می‌شود.



در شکلهای زیر مجموع دو بردار همراستا نمایش داده شده است:



(۱) دو بردار مخالف



(۲) دو بردار موافق

همان جهت $\vec{F}$ است و اگر $k < 0$ باشد، جهت $k\vec{F}$ برخلاف جهت $\vec{F}$ است.

همچنین تجربیات فیزیکی ضرب عدد در بردار را به شکل زیر نشان می‌دهد:

$$k(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = k\vec{F}_1 + k\vec{F}_2$$

$$(k_1 + k_2)\vec{F} = k_1\vec{F} + k_2\vec{F}$$

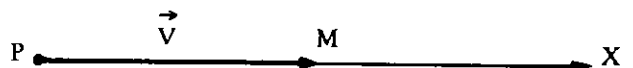
$$k_1(k_2\vec{F}) = (k_1 k_2)\vec{F}$$

برای تکمیل تعریف $k\vec{F}$ ، فرض می‌کنیم که $\vec{0} \cdot \vec{F} = \vec{0}$ باشد.

توجه داشته باشید که تمام خاصیت‌های بیان شده از نظر ریاضی نیز معتبر هستند. مسأله‌ای که در این جا مطرح می‌شود، تعیین برآیند نیروهای $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ است. برای این منظور نمایش هندسی نیروها را تعریف می‌کنیم.

• نمایش هندسی نیروها - تعریف بردار

فرض می‌کنیم که نیروی $\vec{F}$ به نقطه مادی P اثر می‌کند. نیمخط PX که از P شروع می‌شود و همراستای $\vec{F}$ است را رسم می‌کنیم. هر واحد نیرو را با یک واحد طول نمایش می‌دهیم، مثلاً: یک کیلوگرم را با یک سانتی متر نشان می‌دهیم. اگر اندازه نیروی $\vec{F}$ مساوی $a \neq 0$ باشد، $|\vec{F}| = a$ ، نقطه M که فاصله آن از P برابر a واحد طول است را در نظر می‌گیریم.

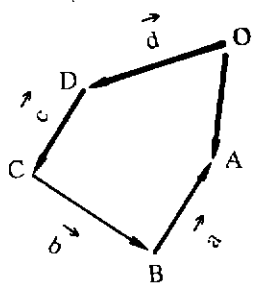


پاره خط PM که ابتدای آن P و انتهای آن M است، یک پاره خط جهت دار نامیده می‌شود، که آن را بردار $\vec{V}$ می‌نامیم.

لازم است تذکر دهیم که کمیت‌های دیگری مثل: سرعت و شتاب نیز وجود دارند که مانند: نیرو برای بیان آنها به پاره خط‌های جهت دار یا بردارها نیاز داریم.

مطالعه و بررسی بردارها یعنی؛ پاره خط‌های جهت دار که در اصل کمیت‌های هندسی هستند، نه تنها از نظر فیزیکی بلکه به طور کلی از نظر ریاضی اهمیت فراوانی دارد. لازم است توضیح دهیم که گرچه تعریف بردار را با تکیه به مفهوم فیزیکی نیرو بیان کردیم، ولی می‌توان خواص بردارها را صرف نظر از این ارتباط مورد بررسی و

$$\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



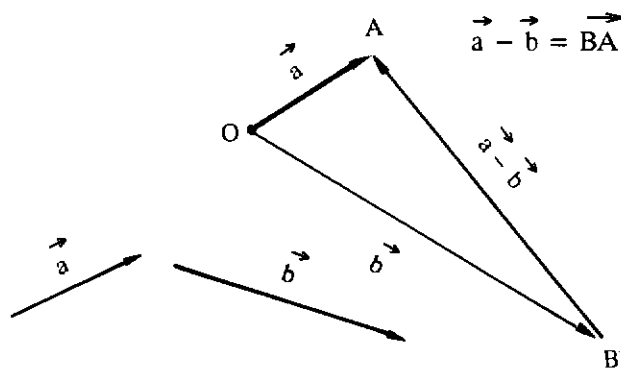
حالت (۲)

تفریق دو بردار

بنا به تعریف تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ برداری است مانند: $\vec{c}$ به طوری که داشته باشیم:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

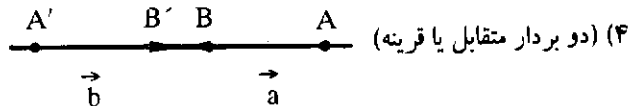
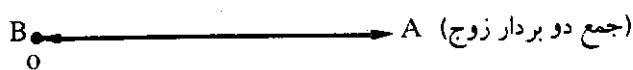
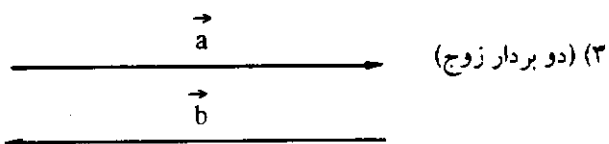
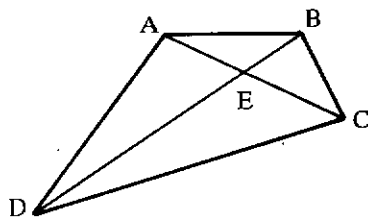
بردار $\vec{c}$ را با $\vec{a} - \vec{b}$ نمایش می دهیم که مانند شکل زیر، برای یافتن آن از نقطه ای مانند: O دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را به ترتیب برابر بایردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رسم می کنیم، بردار $\vec{BA}$ تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ است:



بنابراین بردارهای $\vec{BA}$ و $\vec{AB}$ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ و } \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

مثال ۱: در شکل زیر هر پاره خط متناظر با یک بردار است، حاصل هریک از مجموعه های داده شده را حساب کنید:

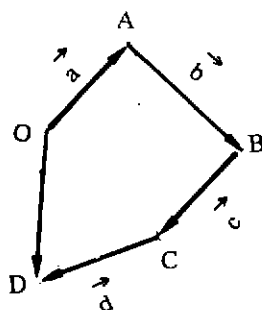
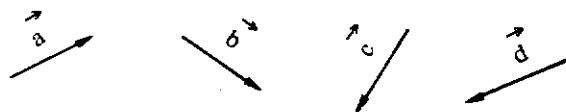


$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0} \text{ می توان نوشت:}$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB}$$

در شکل (۳) مجموع دو بردار صفر شده است، زیرا O و B برهم منطبق شده اند.

اگر چند بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ داشته باشیم، مجموع آنها را چنین تعریف می کنیم: از نقطه ای مانند O بردار $\vec{OA}$ را هم اندازه $\vec{a}$ و از نقطه A بردار $\vec{AB}$ را برابر $\vec{b}$ و از نقطه B بردار $\vec{BC}$ را برابر $\vec{c}$ و سرانجام از نقطه C بردار $\vec{CD}$ را برابر $\vec{d}$ رسم می کنیم. بردار $\vec{OD}$ را مجموع هندسی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ می نامیم و با $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ نمایش می دهیم. با توجه به شکل دیده می شود که مجموع چند بردار به ترتیب بردارها بستگی ندارد و به هر ترتیبی که بردارهای مورد نظر را با هم جمع کنیم در هر صورت به یک بردار خواهیم رسید که با مجموع بردارها برابر است. به عنوان مثال: بردارهای زیر را با دو ترتیب مختلف جمع می کنیم.



$$\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

حالت (۱)

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= \langle a_1, b_1 \rangle \cdot \langle a_2, b_2 \rangle = (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}) \cdot (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}) \\ &= a_1 a_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + b_1 a_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + b_1 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= a_1 a_2 (1) + a_1 b_2 (0) + b_1 a_2 (0) + b_1 b_2 (1) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2\end{aligned}$$

مثال ۲: وضع بردارهای $\vec{V}_1 = \langle -1, \frac{3}{4} \rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle 2, 4 \rangle$ نسبت به هم چگونه است.

حل:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= \langle -1, \frac{3}{4} \rangle \cdot \langle 2, 4 \rangle = (-1)(2) + (\frac{3}{4})(4) \\ &= -2 + 3 = 1.\end{aligned}$$

حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار صفر است و در نتیجه دو بردار برهم عمودند.

تبصره: حاصل ضرب نقطه‌ای بردار $\vec{V} = \langle a, b \rangle$ در خودش چنین است:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow |\vec{V}|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

قضیه: هرگاه α زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ باشد، یعنی

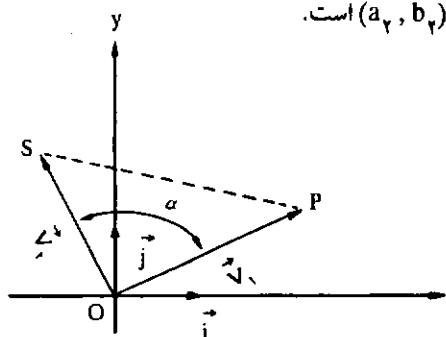
$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \alpha \text{ آنگاه}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \alpha$$

برهان: شکل زیر را در نظر می گیریم:

فرض کنیم: $\vec{V}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}$ و $\vec{V}_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ و همچنین، OP

نمایش موضعی $\vec{V}_1$ و OS نمایش موضعی $\vec{V}_2$ باشد. P نقطه (a_1, b_1) و S نقطه (a_2, b_2) است.



$$\vec{BE} + \vec{AD} + \vec{EA} + \vec{CB} = ? \quad (\text{الف})$$

$$\vec{AC} + (-\vec{BC}) = ? \quad (\text{ب})$$

$$\vec{BA} + \vec{CD} + (-\vec{BD}) = ? \quad (\text{ج})$$

حل: الف)

$$\begin{aligned}\vec{BE} + \vec{AD} + \vec{EA} + \vec{CB} &= (\vec{CB} + \vec{BE}) + (\vec{EA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{CE} + \vec{ED} = \vec{CD}\end{aligned}$$

$$\vec{AC} + (-\vec{BC}) = \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{BA} + \vec{CD} + (-\vec{BD}) = \vec{BA} + \vec{CD} - \vec{BD} \quad (\text{ج})$$

$$= \vec{BA} + (\vec{CD} + \vec{DB})$$

$$= \vec{BA} + \vec{CB}$$

$$= \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$$

• ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو برابر

حاصل ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار عددی حقیقی (یا

اسکالر) است و بردار نیست. فرض می کنیم $\vec{V}_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$ و

$\vec{V}_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$ دو بردار از فضای برداری V_2 باشند.

حاصل ضرب داخلی $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ که با نماد $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ نشان داده می شود،

عبارت عددی زیر است:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \langle a_1, b_1 \rangle \cdot \langle a_2, b_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

برهان: اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ ترتیب بردارهای یکانی (واحد) محورهای x و y

باشند، داریم:

$$\vec{V}_1 = \langle a_1, b_1 \rangle = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} \text{ و } \vec{V}_2 = \langle a_2, b_2 \rangle = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$$

و همچنین حاصل ضربهای نقطه‌ای زیر را نیز به آسانی می توان

تحقیق کرد:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

زیرا خواهیم دید که حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار عمود بر هم صفر

است و حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار موازی و یا منطبق بر هم برابر

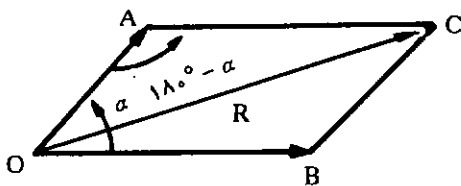
یک است.

• اندازه برآیند دو بردار

دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را در نظر گرفته و برآیند (مجموع هندسی) آنها را مشخص می‌کنیم.

اگر $\vec{OA} = \vec{V}_1$ و $\vec{OB} = \vec{V}_2$ و $\vec{OC} = \vec{R}$ و $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \alpha$ و $\vec{OB} = \vec{V}_2$ و $\vec{OA} = \vec{V}_1$ اگر مجموع هندسی (برآیند) آنها باشد، در مثلث $\triangle OAC$ داریم:

$$OA = |\vec{V}_1| \quad AC = |\vec{V}_2| \quad \text{و} \quad \angle OAC = 180^\circ - \alpha$$



طبق رابطه کسینوسها می‌توان نوشت:

$$\triangle OAC : OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA \times AC \cos \angle OAC$$

$$\Rightarrow |\vec{R}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - 2|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos (180^\circ - \alpha)$$

و با توجه به $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ رابطه بالا را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 + 2|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad (I)$$

بنابراین، بین چهار جزو $|\vec{V}_1|$ و $|\vec{V}_2|$ و $|\vec{R}|$ و $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \alpha$ سه جزو معلوم باشد، می‌توان با استفاده از رابطه (I) جزو مجهول را محاسبه کرد.

مثال ۳: طول دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ به ترتیب ۶ و ۴ و زاویه بین دو بردار 120° است. طول بردار برآیند را حساب کنید.

حل: طبق رابطه برآیند دو بردار (رابطه I) خواهیم داشت:

$$|\vec{R}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ \\ = 36 + 16 - 24 = 28 \Rightarrow |\vec{R}| = 2\sqrt{7}$$

با توجه به شکل در مثلث $\triangle OPS$ قانون کسینوسها را می‌نویسیم:

$$|\vec{PS}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - 2|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - |\vec{PS}|^2}{2|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

می‌دانیم:

$$\vec{PS} = \langle a_2 - a_1, b_2 - b_1 \rangle = (a_2 - a_1)\vec{i} + (b_2 - b_1)\vec{j}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{(a_2^2 + b_2^2) + (a_1^2 + b_1^2) - [(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]}{2|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

$$= \frac{2a_1a_2 + 2b_1b_2}{2|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \alpha$$

با توجه به اینکه $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$ ، خواهیم داشت:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 \quad (\text{قانون تعویض پذیری})$$

و همچنین روابط زیر را نیز می‌توان بسادگی تحقیق کرد:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 \quad (\text{قانون پخش پذیری})$$

هرگاه $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بردارهایی در $\vec{V}_2$ بوده و c یک اسکالر باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$c(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (c\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = |\vec{V}_1|^2$$

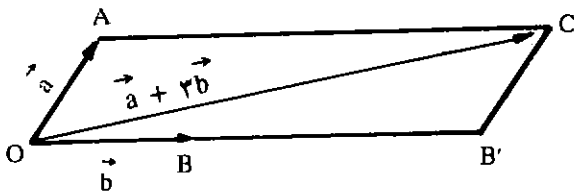
$$\therefore \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = 0$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0) \Leftrightarrow (\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \angle(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \pm \frac{\pi}{2})$$

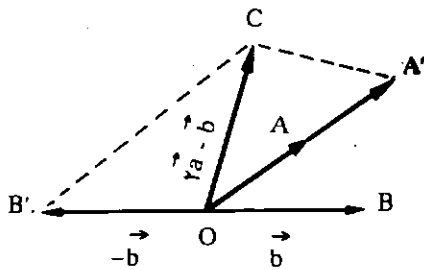
(۲) با توجه به شکل زیر داریم:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB'} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$(|\vec{OB'}| = 3|\vec{OB}|)$$



(۳) برای پیدا کردن $2\vec{a} - \vec{b}$ ابتدا بردار $2\vec{a}$ و سپس بردار $-\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم و سرانجام مجموع هندسی آنها یعنی: $2\vec{a} + (-\vec{b})$ یا همان $2\vec{a} - \vec{b}$ را رسم می‌کنیم.



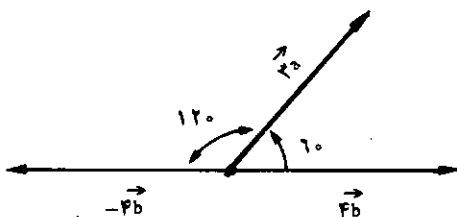
مثال ۶: اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 1$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ باشد، اندازه بردارهای زیر را حساب کنید:

$$3\vec{a} + 4\vec{b} \quad (۱) \quad -3\vec{a} - 3\vec{b} \quad (۲) \quad 3\vec{a} - 4\vec{b} \quad (۳)$$

حل: (۱) داریم:

$$3\vec{a} - 4\vec{b} = 3\vec{a} + (-4\vec{b})$$

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



مثال ۴: اگر $|\vec{V}_1| = 3$ و $|\vec{V}_2| = 4$ و $|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = \sqrt{13}$ باشد، اندازه زاویه $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = |\vec{R}| \Rightarrow |\vec{R}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 + 2|\vec{V}_1||\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$$\Rightarrow 13 = 9 + 16 + 2 \times 3 \times 4 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \Rightarrow$$

$$\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \cos 120^\circ \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 120^\circ$$

تمرین: اگر $|\vec{V}_1| = 3$ و $|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = \sqrt{13}$ و $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 120^\circ$ باشد، اندازه $|\vec{V}_2|$ را حساب کنید.

راهنمایی: با استفاده از فرمول اندازه بردار (رابطه I) مانند مثال قبل نتیجه بگیرید که $|\vec{V}_2| = 4$ است.

• قرینه یک بردار

قرینه $\vec{a}$ به $-\vec{a}$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر قرینه یک بردار مانند $\vec{a}$ برداری است مانند $-\vec{a}$ که با بردار $\vec{a}$ هم‌اندازه، هم‌راستا و مختلف‌الجهت با آن باشد. با توجه به مطلب فوق می‌توان نوشت:

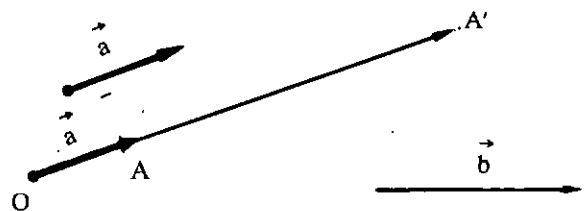
$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$$

مثال ۵: اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باهم زاویه 45° تشکیل دهند، بردارهای زیر را رسم کنید:

$$2\vec{a} - \vec{b} \quad (۳) \quad \vec{a} + 3\vec{b} \quad (۲) \quad 4\vec{a} \quad (۱)$$

حل: (۱) اگر $\vec{OA} = \vec{a}$ باشد، $\vec{OA'} = 4\vec{a}$ است.

باتوجه به اینکه $|\vec{OA'}| = 4|\vec{OA}|$ اختیار شده باشد.



با فرض $\vec{V}_1 = 3\vec{a}$, $\vec{V}_2 = 4\vec{b}$ خواهیم داشت:

(۳) داریم:

$$|\vec{3a}| = 3|\vec{a}| = 3 \times 2 = 6 \text{ و } |\vec{4b}| = 4 \times 1 = 4$$

$$|\vec{V}_1| = 3|\vec{a}| = 3 \times 2 = 6 \text{ و}$$

$$(\vec{3a}, \vec{4b}) = 60^\circ$$

$$|\vec{V}_2| = |-\vec{4b}| = 4|\vec{b}| = 4 \times 1 = 4$$

بنابراین:

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطه I) نتیجه می شود:

$$|\vec{3a} + \vec{4b}|^2 = |\vec{3a}|^2 + |\vec{4b}|^2 + 2|\vec{3a}| \cdot |\vec{4b}| \cos 60^\circ$$

$$= 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \left(\frac{1}{2}\right) = 36 + 16 + 24 = 76$$

$$\Rightarrow |\vec{3a} + \vec{4b}| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{3a} + (-\vec{4b})|^2 = |\vec{V}_1 + \vec{V}_2|^2 =$$

$$|\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 + 2|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos 120^\circ$$

$$|\vec{3a} - \vec{4b}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 16 + 48\left(-\frac{1}{2}\right) = 28$$

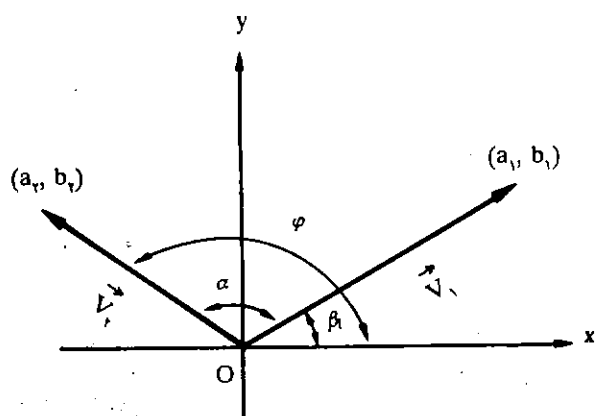
$$\Rightarrow |\vec{3a} - \vec{4b}| = 2\sqrt{7}$$

تمرین: اگر $|\vec{a}| = 4$ و $|\vec{b}| = 3$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ باشد، اندازه بردارهای زیر را حساب کنید:

$$-\vec{2a} - \vec{3b} \quad (3) \quad \vec{2a} - \vec{2b} \quad (2) \quad \vec{2a} + \vec{b} \quad (1)$$

(۲) داریم:

تعبیر هندسی حاصل ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار
دو بردار غیر صفر $\vec{V}_1 = \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1 \rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle \vec{a}_2, \vec{b}_2 \rangle$ را در
دستگاه مختصات با زاویه α بین $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ در نظر می گیریم.



$$|-\vec{2a}| = 2|\vec{a}| = 2 \times 2 = 4 \text{ و } |-\vec{2b}| = 2|\vec{b}| = 2 \times 1 = 2$$

$$(-\vec{2a}, -\vec{2b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

$$|-\vec{2a} - \vec{2b}|^2 = |-\vec{2a}|^2 + |-\vec{2b}|^2 + 2|-\vec{2a}| \cdot |-\vec{2b}| \cos 60^\circ$$

$$= 4^2 + 2^2 + 2 \times 4 \times 2 \left(\frac{1}{2}\right) = 16 + 4 + 8 = 28$$

$$\Rightarrow |-\vec{2a} - \vec{2b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

با فرض $\vec{V}_1 = 3\vec{a}$, $\vec{V}_2 = 4\vec{b}$ خواهیم داشت:

(۳) داریم:

$$|3\vec{a}| = 3|\vec{a}| = 3 \times 2 = 6 \text{ و } |4\vec{b}| = 4 \times 1 = 4$$

$$|\vec{V}_1| = 3|\vec{a}| = 3 \times 2 = 6 \text{ و}$$

$$(3\vec{a}, 4\vec{b}) = 60^\circ$$

$$|\vec{V}_2| = |-4\vec{b}| = 4|\vec{b}| = 4 \times 1 = 4$$

بنابراین:

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطه ۱) نتیجه می‌شود:

$$|3\vec{a} + 4\vec{b}|^2 = |3\vec{a}|^2 + |4\vec{b}|^2 + 2|3\vec{a}| \cdot |4\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \left(\frac{1}{2}\right) = 36 + 16 + 24 = 76$$

$$|\vec{R}|^2 = |3\vec{a} + (-4\vec{b})|^2 = |\vec{V}_1 + \vec{V}_2|^2 =$$

$$|\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 + 2|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow |3\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

$$|3\vec{a} - 4\vec{b}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 16 + 48\left(-\frac{1}{2}\right) = 28$$

تمرین: اگر $|\vec{a}| = 4$ و $|\vec{b}| = 2$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ باشد، اندازه بردارهای زیر را حساب کنید:

$$\Rightarrow |3\vec{a} - 4\vec{b}| = 2\sqrt{7}$$

$$-2\vec{a} - 3\vec{b} \quad (3) \quad 2\vec{a} - 2\vec{b} \quad (2) \quad 2\vec{a} + \vec{b} \quad (1)$$

(۲) داریم:

تعبیر هندسی حاصل ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار

دو بردار غیر صفر $\vec{V}_1 = \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1 \rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle \vec{a}_2, \vec{b}_2 \rangle$ را در

دستگاه مختصات با زاویه بین $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \alpha$ در نظر می‌گیریم.

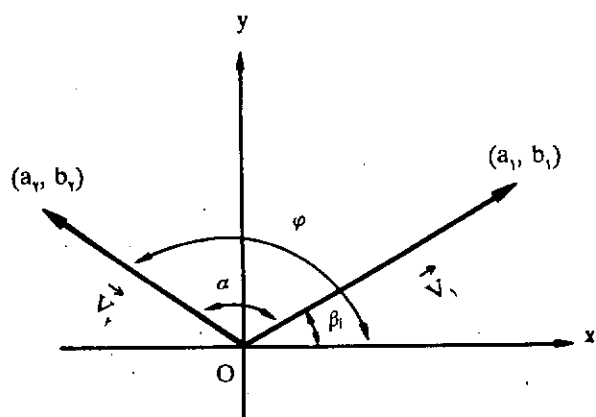
$$|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = 2 \times 2 = 4 \text{ و } |-2\vec{b}| = 2|\vec{b}| = 2 \times 1 = 2$$

$$(-2\vec{a}, -2\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

$$|-2\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |-2\vec{a}|^2 + |-2\vec{b}|^2 + 2|-2\vec{a}| \cdot |-2\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= 4^2 + 2^2 + 2 \times 4 \times 2 \left(\frac{1}{2}\right) = 16 + 4 + 8 = 28$$

$$\Rightarrow |-2\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



مثال ۷: زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1 = \langle -3, 4 \rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle 0, 2 \rangle$ را به دست آورید.

و بنابراین می توان نوشت:

$$\cos \alpha = \cos (\varphi - \beta) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta$$

حل:

$$\cos \alpha = \frac{(-3)(0) + (4)(2)}{\sqrt{((-3)^2 + 4^2)} \sqrt{(0)^2 + 2^2}} = \frac{8}{10} = 0.8$$

با توجه به شکل داریم: $\alpha = \varphi - \beta$

اما با توجه به نمودار، داریم:

$$\cos \alpha = 0.8 \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } (0.8) \approx 36^\circ$$

مثال ۸: زاویه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است، اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 3$ باشد، زاویه ای که دو بردار $(\vec{a} + \vec{b})$ و $(\vec{a} - \vec{b})$ با هم می سازند را حساب کنید.

$$\sin \beta = \frac{b_1}{|\vec{V}_1|}, \quad \cos \beta = \frac{a_1}{|\vec{V}_1|}, \quad \sin \varphi = \frac{b_2}{|\vec{V}_2|}$$

$$\cos (\pi - \varphi) = \frac{-a_2}{|\vec{V}_2|} \Rightarrow -\cos \varphi = \frac{-a_2}{|\vec{V}_2|}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} + 3^2 = 19$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 19 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 2^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} + 3^2 = 5 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}| \cos [(\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})]$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 4 - 9 =$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{19} \cos ((\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})) \Rightarrow ((\vec{a} - \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b})) \approx 115^\circ/7$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{a_2}{|\vec{V}_2|}$$

پس می توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{a_2}{|\vec{V}_2|} \cdot \frac{a_1}{|\vec{V}_1|} + \frac{b_1}{|\vec{V}_1|} \cdot \frac{b_2}{|\vec{V}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

$$= \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

و در نتیجه داریم:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \alpha$$

همچنین داریم:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$$