

بردارها

(قسمت چهارم)

(ریاضی ۴ نظام جدید و ریاضیات جدید دوم ریاضی)

سید محمد رضا هاشمی موسوی

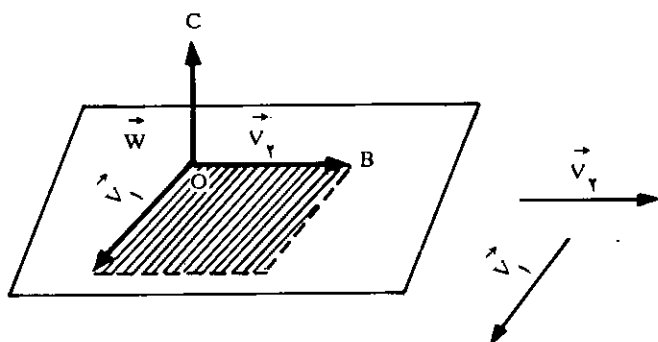
◀ ضرب برون‌ی (بردار) دو بردار

حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را برداری مانند $\vec{W}$ تعریف می‌کنیم هرگاه:

۱. راستای $\vec{W}$ بر راستای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ عمود باشد.
۲. جهت $\vec{W}$ طوری باشد که کتج $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ مستقیم باشد.
۳. اندازه $\vec{W}$ برابر باشد با:

$$|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|$$

حاصل ضرب برون‌ی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است.



◀ ویژگیهای ضرب برون‌ی دو بردار

بسادگی ثابت می‌شود که حاصل ضرب برون‌ی بردارها دارای ویژگیهای زیر است:

(توجه کنید: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$)

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \\ \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) &= \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \\ \forall a \in \mathbb{R} : (a \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 &= \vec{V}_1 \wedge (a \vec{V}_2) = a (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}) &\Leftrightarrow (\vec{V}_1 = \vec{0} \vee \vec{V}_2 = \vec{0} \vee \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2) \end{aligned}$$

◀ حاصل ضرب برون‌ی دو بردار بر حسب تصویرهای آنها

در دستگاه مختصات قائم $Oxyz$ بردارهای $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$ و

$\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت داریم:

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

حاصل ضرب خارجی دو بردار را حاصل ضرب برداری دو بردار نیز نامیده و بایکی از نمادهای $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ یا $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

باتوجه به قسمت (۳) می‌توان گفت اندازه حاصل ضرب برون‌ی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مساوی عدد مساحت متوازی الاضلاعی است که روی این دو بردار بنامی شود. برای نمایش حاصل ضرب برون‌ی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ از نقطهٔ اختیاری O بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را به ترتیب مساوی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم؛ آنگاه از نقطهٔ O خطی عمود بر صفحهٔ AOB رسم می‌کنیم و روی این خط بردار $\vec{OC}$ را چنان اختیار می‌کنیم که کتج $(O - ABC)$ یک کتج مستقیم و اندازهٔ بردار $\vec{OC}$ مساوی $|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ باشد. بردار $\vec{OC}$ که بدین ترتیب به دست می‌آید و آن را با $\vec{W}$ نمایش می‌دهیم؛

$$|\vec{V}| = 4 \times 4 \times 3 \sin \frac{\pi}{4} = 24 \Rightarrow |\vec{V}| = 24$$

مثال ۲: اگر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ دو بردار مفروض، و $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{4}$ باشد، اندازه بردار $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ را حساب کنید.

حل:

$$|\vec{V}| = |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \sin \frac{\pi}{4} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

مثال ۳: بردارهای $\vec{V}_1$ (۱ و ۲ و ۳) و $\vec{V}_2$ (۱ و -۳ و ۱) مفروضند، تصاویر $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ را بر محورهای مختصات و همچنین اندازه بردار $\vec{V}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 9)\vec{i} + (1 - 3)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} = -7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow X = -7 \text{ و } Y = -2 \text{ و } Z = 1$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

مثال ۴: دو بردار $\vec{V}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ مفروضند، بردارهای یک‌ای هم‌راستا با $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ پیدا کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (-2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

اگر $\vec{U}_1$ بردار یک‌ای هم‌راستا با $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{U}_1 = \pm \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 + \vec{V}_2|}$$

$$\vec{V}_r = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

و بنابراین ضرب برونی دو بردار چنین می‌شود:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

اما با توجه به تعریف ضرب برونی بردارها می‌توان نوشت:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \quad \text{و}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \quad \text{و}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \quad \text{و}$$

بنابراین پس از ضرب برونی و استفاده از تساویهای اخیر و اختصار لازم داریم:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \text{و یا:}$$

که تصویرهای حاصل ضرب خارجی دو بردار مفروض بر محورهای قائم مختصات چنین است:

$$X = y_1z_2 - z_1y_2 \text{ و } Y = z_1x_2 - x_1z_2 \text{ و } Z = x_1y_2 - x_2y_1$$

در نتیجه اندازه حاصل ضرب برونی دو بردار بر حسب تصویرهای آن

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \quad \text{بردارها به صورت زیر است:}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

برای سادگی می‌توان حاصل ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

مثال ۱: اندازه بردار $\vec{V} = 2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2$ را با فرض آن که $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{4}$ باشد، حساب کنید.

حل:

$$\begin{aligned} |\vec{V}| &= |2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2| = |4\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| \\ &= 4|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (2-4)\vec{i} - (-4-3)\vec{j} + (8+3)\vec{k} \\ = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}$$

پس:

$$|\vec{C}| = |\lambda| \cdot |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\lambda| \sqrt{4+49+121} = |\lambda| \sqrt{174}$$

بنابراین داریم:

$$|\lambda| \sqrt{174} = \sqrt{29} \Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{174}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

پس مسأله دارای دو جواب به صورت زیر است:

$$\vec{C} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} (-2\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k})$$

مثال ۶: سه بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$ مفروضند،مقدار بردار $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (1)\vec{k}$$

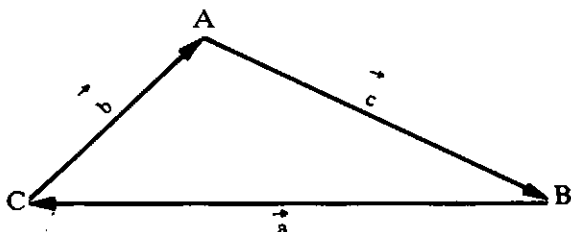
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (0) + (0) + (-1) = -1$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

مثال ۷: در سه بر ABC فرمول: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ را به دست آورید.



و چون:

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

پس:

$$\vec{U}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} (3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})$$

همچنین:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (-2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2+12)\vec{i} - (-5+6)\vec{j} + (-20-4)\vec{k}$$

$$= 14\vec{i} - \vec{j} - 24\vec{k}$$

به طریق مشابه اگر $\vec{U}_2$ بردار یک‌ای هم‌راستا با $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ باشد،

خواهیم داشت:

$$\vec{U}_2 = \pm \frac{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|}$$

و چون:

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = \sqrt{14^2 + 1 + 24^2} = \sqrt{196 + 1 + 576} \\ = \sqrt{773}$$

پس:

$$\vec{U}_2 = \pm \frac{\sqrt{773}}{773} (14\vec{i} - \vec{j} - 24\vec{k})$$

مثال ۵: دو بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ مفروضند. برداری را به دست آورید که بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمودبوده و قدر مطلق آن برابر $\sqrt{29}$ باشد.حل: بردار مطلوب $\vec{C}$ به صورت زیر است:

$$\vec{C} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

اما داریم:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$$

از طرفی، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (-1 - 1)\vec{i} + (2 - (-1))\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} \\ &= -2\vec{i} + 3\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} = (1 - 1)\vec{i} + (-2 - (-1))\vec{j} + (-1 - 1)\vec{k} \\ &= -\vec{j} - 2\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6)\vec{i} - (4)\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = -6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}((-6)^2 + (-4)^2 + (2)^2) = \frac{1}{4}(36 + 16 + 4)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{56}{4} \Rightarrow S^2 = 14 \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{14}}$$

تمرین: اگر برای بردارهای a و b و c داشته باشیم:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

ثابت کنید:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$$

(راهنمایی: حل مثال ۷ را مشاهده کنید.)

تمرین: نقاط L و M و N به ترتیب روی اضلاع AB و BC و CA از سه بر ABC داده شده اند و داریم:

$$\vec{AL} = \frac{1}{5}\vec{AB}, \vec{BM} = \frac{1}{5}\vec{BC}, \vec{CN} = \frac{1}{5}\vec{CA}$$

اگر مساحت سه بر ABC را با S و مساحت سه بر LMN را با S' نشان دهیم نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

(راهنمایی: از حل مثال ۸ و تساویهای زیر استفاده کنید:

$$\vec{LM} = \vec{LB} + \vec{BM} = \frac{4}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC}$$

$$\vec{LN} = \vec{LA} + \vec{AN} = -\frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC}$$

$$(\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{BC} \wedge \vec{BA} = \vec{CA} \wedge \vec{CB})$$

حل: باتوجه به شکل داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (۱) را یکبار در $\vec{AB}$ و بار دیگر در $\vec{BC}$ ضرب برداری کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{AB} \wedge (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0} \quad \text{یا} \quad \vec{AB} \wedge \vec{BC} + \vec{AB} \wedge \vec{CA} = \vec{0} \quad (2)$$

و همچنین:

$$\vec{BC} \wedge (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0} \quad \text{یا} \quad \vec{BC} \wedge \vec{AB} + \vec{BC} \wedge \vec{CA} = \vec{0} \quad (3)$$

که از روابط (۲) و (۳) نتیجه می شود:

$$\vec{AB} \wedge \vec{BC} = -(\vec{AB} \wedge \vec{CA}) = \vec{CA} \wedge \vec{AB} \quad (4)$$

$$\vec{BC} \wedge \vec{CA} = -(\vec{BC} \wedge \vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{BC} \quad (5)$$

و باتوجه به روابط (۴) و (۵) می توان نوشت:

$$\vec{AB} \wedge \vec{BC} = \vec{BC} \wedge \vec{CA} = \vec{CA} \wedge \vec{AB}$$

و یا:

$$\vec{BC} \wedge \vec{BA} = \vec{CA} \wedge \vec{CB} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

پس داریم:

$$|\vec{BC} \wedge \vec{BA}| = |\vec{CA} \wedge \vec{CB}| = |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$$

و باتوجه به زاویه های بین بردارها که همه از π کوچکترند نتیجه می شود:

$$a \cdot c \sin \hat{B} = b \cdot a \sin \hat{C} = c \cdot b \sin \hat{A}$$

که از آن فرمول: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ به دست می آید.

مثال ۸: مساحت سه بری که به وسیله سه نقطه A و B و C پدید می آید را به دست آورید، در صورتی که داشته باشیم:

$$\vec{OA} (1, -1, 1), \vec{OB} (-1, 2, 1), \vec{OC} (1, -2, -1)$$

حل: داریم:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$$

و یا:

$$S = \frac{1}{4} (\vec{AB} \wedge \vec{AC})^2$$

رابطه بین حاصلضربهای درونی و برونی دو بردار
اگر زاویه بین دو بردار داده شده $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را φ بگیریم،
برابریهای زیر را داریم:

برابریهای زیر را داریم:

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1), \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos \varphi \quad \text{و}$$

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin \varphi|$$

و در این جا خواهیم داشت:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 = (\vec{V}_1^T) \cdot (\vec{V}_2^T)$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (\vec{V}_1^T) \cdot (\vec{V}_2^T) - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2$$

که بادر نظر گرفتن مؤلفه‌های دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ می‌توان آن را
به صورت زیر نوشت:

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

که به اتحاد لاگرانژ معروف است.

مثال ۹: با فرض $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 3$ و $|\vec{V}_1| = 1$ و $|\vec{V}_2| = 5$ ، مقدار

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| \text{ را حساب کنید.}$$

حل: با توجه به اتحاد لاگرانژ داریم:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (1)^2 (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow$$

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = 4$$

تصویر^(۲) متعامد یک بردار بر روی برداری دیگر

تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ روی بردار

$$\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

درحقیقت عدد بالا تصویر متعامد $\vec{V}_1$ روی محوری است که

$$\text{بردار یکه آن } \frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} \text{ است.}$$

عبارت $\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1$ بر حسب مؤلفه‌های دو بردار چنین است:

$$\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

مثال: تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ را روی بردار
 $\vec{V}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ پیدا کنید.

حل: داریم:

$$\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} =$$

$$\frac{3(1) + 4(4) + (-1)(-4)}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{21}{\sqrt{33}} = \frac{21}{\sqrt{33}}$$

$$\Rightarrow \text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{21}{\sqrt{33}}$$

لازم است توضیح دهیم که منظور از تصویر (مؤلفه) بردار $\vec{V}_1$ بر

بردار غیر صفر $\vec{V}_2$ و یا در سوی بردار غیر صفر $\vec{V}_2$ ؛ عددی است

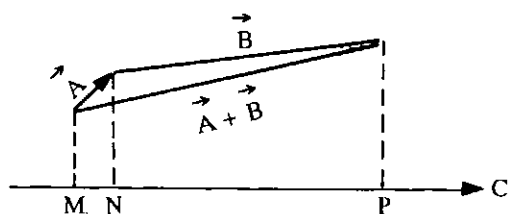
مانند: $P = |\vec{V}_1| \cos \theta$ که در آن θ زاویه بین $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است. و یا:
همانطور که در شکل‌های زیر مشاهده می‌شود، P می‌تواند عددی مثبت، منفی یا مساوی صفر باشد:

$$\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

بنابراین برای یافتن مؤلفه $\vec{V}_1$ در سوی $\vec{V}_2$ کافی است بردار $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را

در $\vec{V}_1$ ضرب عددی (اسکالر) کنیم. $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را که برداری است

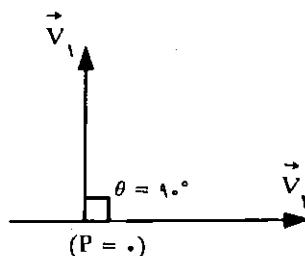
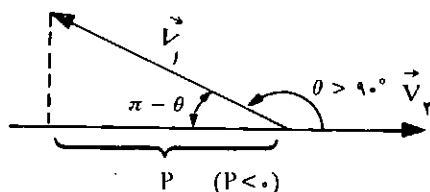
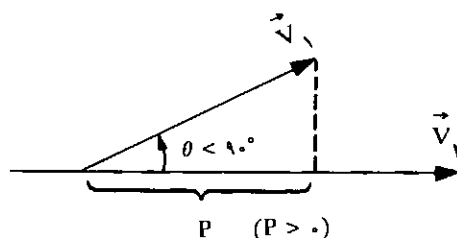
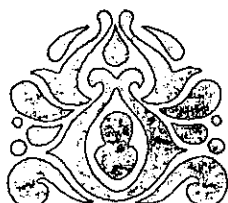
به طول واحد و در سوی $\vec{V}_2$ ، بردار سوی $\vec{V}_2$ می‌نماید.
تمرین: باتوجه به شکل زیر:



ثابت کنید:

$$\frac{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|}$$

(راهنمایی: از تساوی $\vec{MP} = \vec{MN} + \vec{NP}$ استفاده کنید.)



باتوجه به شکل‌های بالا می‌توان نوشت:

$$P = |\vec{V}_1| \cos \theta$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta$$

از طرفی داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

و یا:

پس خواهیم داشت:

$$p = |\vec{V}_1| \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$