

بردارها

(قسمت سوم)

سید محمد رضا هاشمی موسوی

« این قسمت را با حل چند مسأله آغاز می‌کنیم:

۱- ثابت کنید که اندازه زاویه محاطی مقابل به قطر هر دایره برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.

حل: نقطه دلخواه M را روی پیرامون دایره به مرکز O و به قطر AB در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\vec{MA} = \vec{MO} + \vec{OA} \quad (1)$$

$$\vec{MB} = \vec{MO} + \vec{OB} \quad (2)$$

از ضرب روابط (۱) و (۲)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MO} + \vec{OA}) (\vec{MO} + \vec{OB}) \\ &= \vec{MO}^T + (\vec{OA} + \vec{OB}) \vec{MO} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} \end{aligned}$$

تساویهای $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OM}|$ و $\vec{OA} = -\vec{OB}$ بدیهی است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= \vec{MO}^T + (-\vec{OB} + \vec{OB}) \vec{MO} - \vec{OB} \cdot \vec{OB} \\ &= \vec{MO}^T - \vec{OB}^T = \vec{MO}^T - \vec{MO}^T = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{AMB} = \frac{\pi}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$

۲- در متوازی الاضلاع ABCD از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر قطر BD و ضلع AB وارد می‌کنیم، ثابت کنید:

$$\vec{BE} \cdot \vec{BD} = \vec{BF} \cdot \vec{BA} = \vec{BC}^T$$

$$\vec{BE} \cdot \vec{BD} = \vec{BD} \cdot \vec{BE} = \vec{BD} \cdot (\vec{BC} + \vec{CE}) \quad \text{حل: داریم:}$$

$$= \vec{BD} \cdot \vec{BC} + \vec{BD} \cdot \vec{CE}$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{CE} = 0 \quad \text{با توجه به فرض } \vec{CE} \perp \vec{BD}, \text{ داریم:}$$

همچنین BD قطر متوازی الاضلاع است، پس می‌توان نوشت:

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{BA}$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{BE} = \vec{BD} \cdot \vec{BC} = (\vec{BC} + \vec{BA}) \cdot \vec{BC} \quad \text{پس:}$$

$$= \vec{BC}^T + \vec{BA} \cdot \vec{BC}$$

$$\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC} \quad \text{از طرفی می‌توان نوشت:}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{BD} \cdot \vec{BE} = \vec{BC}^T + \vec{BA} (\vec{BF} + \vec{FC})$$

$$= \vec{BC}^T + \vec{BA} \cdot \vec{BF} + \vec{BA} \cdot \vec{FC}$$

با توجه به فرض $\vec{CF} \perp \vec{AB}$ ، داریم:

$$\vec{BA} \cdot \vec{FC} = \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$\vec{BD} \cdot \vec{BE} = \vec{BC}^T + \vec{BA} \cdot \vec{BF}$$

$$\vec{BE} \cdot \vec{BD} = \vec{BF} \cdot \vec{BA} = \vec{BC}^T$$

و یا:

در نتیجه:

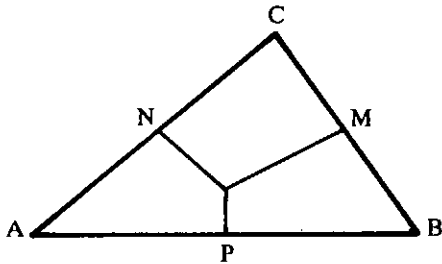
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{BC}$$

۵- ثابت کنید که عمود میانه‌های اضلاع یک سه‌بر از یک نقطه می‌گذرند.

حل: فرض می‌کنیم عمود میانه‌های دو ضلع AB و AC در نقطه O برخورد کنند.

اگر این عمود میانه‌ها را OP و ON بنامیم، خواهیم داشت:

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{و} \quad \vec{ON} \cdot \vec{AC} = 0$$



همچنین: $\vec{AN} = \vec{NC} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ و $\vec{AP} = \vec{PB} = \frac{1}{2} \vec{AB}$

در این جا اگر نقطه میانه ضلع BC را M بنامیم، کافی است ثابت کنیم

$\vec{OM} \cdot \vec{BC} = 0$ که OM بر BC عمود است یعنی:

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ اما داریم:

و همچنین با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NC} + \vec{CM}$$

$$\text{یا} \quad \vec{OM} = \vec{ON} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{CB} =$$

$$\vec{ON} + \frac{\vec{AC} + \vec{CB}}{2} = \vec{ON} + \frac{\vec{AB}}{2}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{BC} = (\vec{ON} + \frac{1}{2} \vec{AB}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$= \vec{ON} \cdot \vec{BA} + \vec{ON} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

و چون $\vec{ON} \cdot \vec{AC} = 0$ است، پس:

$$\vec{OM} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot (\vec{ON} + \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{CA})$$

۳- اگر نقطه O در صفحه سه بر ABC واقع باشد، ثابت کنید:

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{OB} \cdot \vec{CA} + \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0 \quad (1)$$

و از آن جا نتیجه بگیرید که در هر سه‌بر، سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.

حل: داریم:

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{OB} \cdot \vec{CA} + \vec{OC} \cdot \vec{AB}$$

$$= \vec{OA} \cdot \vec{BC} + (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} + (\vec{OA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB}$$

$$= \vec{OA} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$= \vec{OA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AB}) + \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AC})$$

$$= \vec{OA} \cdot \vec{0} + \vec{AB} \cdot \vec{0} = 0 + 0 = 0$$

در این جا اگر نقطه O را بر نقطه H محل برخورد ارتفاعات AA' و BB' منطبق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \text{و} \quad \vec{OB} \cdot \vec{CA} = 0$$

و با توجه به تساوی (۱) داریم:

یعنی: $\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$ بر AB عمود است و در نتیجه ارتفاع CC' نیز از نقطه H می‌گذرد.

۴- ثابت کنید که در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

حل: داریم:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \quad \text{و} \quad \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{CD} - \vec{DA}$$

و یا:

$$\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} - \vec{DA}$$

$$+ \vec{CD} + \vec{DA} - \vec{CD} - \vec{DA}$$

$$\vec{CD} = -\vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{DA} = -\vec{BC}$$

چون:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} - \vec{CD} \cdot \vec{DA} = 0$$

پس:

و همچنین:

$$\vec{AE} = \vec{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{b} \Rightarrow \vec{AE}^T = (\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{b})^T = \vec{a}^T + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{b}^T$$

$$\Rightarrow \vec{AE}^T = \vec{a}^T + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{b}^T = \vec{a}^T + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a}^T = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \vec{a}^T$$

$$\Rightarrow |\vec{AE}| = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} |\vec{a}|$$

$$\vec{AF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{AF}^T = (\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a} + \vec{b})^T = \frac{1}{2} \vec{a}^T + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^T$$

$$\Rightarrow \vec{AF}^T = \frac{1}{2} \vec{a}^T + \vec{b}^T = \frac{1}{2} \vec{a}^T + \vec{a}^T = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \vec{a}^T$$

$$\Rightarrow |\vec{AF}| = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} |\vec{a}|$$

پس:

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} |\vec{a}| \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} |\vec{a}| \cos \varphi = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \vec{a}^T$$

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} \cos \varphi = 1+\sqrt{2}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$$

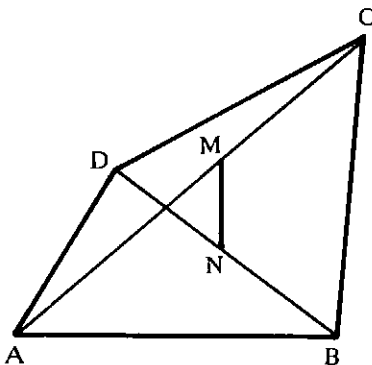
و یا:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

و بنابراین خواهیم داشت:

۷- اگر M و N نقاط میانه قطره‌های چهاربر (چپ یا راست) ABCD باشند، ثابت کنید:

$$\vec{AB}^T + \vec{BC}^T + \vec{CD}^T + \vec{DA}^T = \vec{AC}^T + \vec{BD}^T + 4\vec{MN}^T$$



حل: چون M و N نقاط میانه قطره‌های AC و BD هستند، داریم:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AC} \quad \text{و} \quad \vec{BN} = \frac{1}{2} \vec{BD}$$

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN} = \frac{1}{2} \vec{CA} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BD}$$

پس:

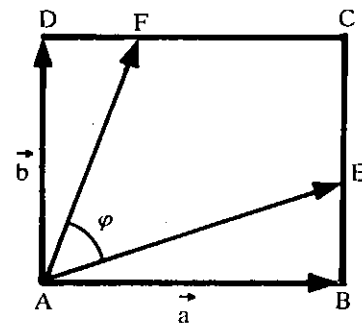
$$= \vec{BA} \cdot (\vec{ON} + \vec{AP} + \vec{NA})$$

$$= \vec{BA} \cdot (\vec{ON} + \vec{NA} + \vec{AP})$$

$$= \vec{BA} \cdot \vec{OP} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{OM} \cdot \vec{BC} = 0}$$

یعنی OM بر BC عمود است. و در نتیجه OM عمود میانه BC است.

۶- در مربع ABCD دو نقطه E و F به ترتیب روی اضلاع BC و CD داده شده‌اند به طوری که $BE = \frac{1}{3} BC$ و $DF = \frac{1}{3} DC$. زاویه EAF را حساب کنید.



حل: برای محاسبه زاویه $\varphi = \angle EAF$ ، کافی است حاصل ضرب

اسکالر دو بردار AE و AF را حساب کنیم که از آن $\cos \varphi$ و در نتیجه φ به دست خواهد آمد. و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{a}$$

و از آن‌جا داریم:

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = (\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}) \cdot (\frac{1}{3} \vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{3} \vec{a}^T + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{b}^T$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \text{و} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

و چون:

پس خواهیم داشت:

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \frac{1}{3} \vec{a}^T + \frac{1}{3} \vec{b}^T = \frac{1}{3} \vec{a}^T + \frac{1}{3} \vec{a}^T = \frac{2}{3} \vec{a}^T$$

از طرف دیگر داریم:

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = |\vec{AE}| \cdot |\vec{AF}| \cos \varphi$$

(راهنمایی: از روابط زیر استفاده کنید):

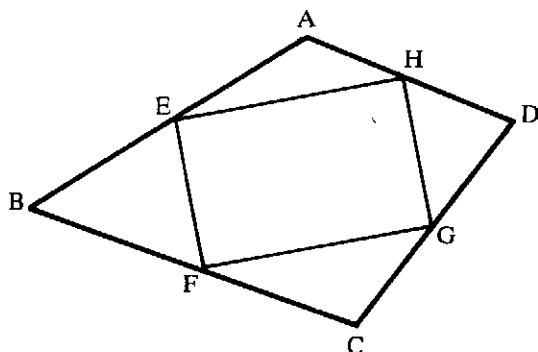
$$\vec{oA} + \vec{oB} = \vec{oP} \text{ و } \vec{oB} + \vec{oC} = \vec{oQ} \text{ و } \vec{oC} + \vec{oA} = \vec{oR}$$

۲- در متوازی الاضلاع ABCD قرار می‌دهیم، $BD=b$ و $AC=a$ ،
بردارهای AB و BC را بر حسب a و b پیدا کنید.

(راهنمایی: از روابط $AC = AB + BC = a$ و

$$BD = BC + CD = BC - AB = b \text{ استفاده کنید.})$$

۳- ثابت کنید که اگر در چهار ضلعی (چپ یا راست) نقاط میانه اضلاع پی‌درپی را به هم وصل کنیم، شکل به دست آمده یک متوازی الاضلاع است.



(راهنمایی: با فرض $AB = a$ و $BC = b$ و $CD = c$ و

$DA = d$ ، و در صورتی که نقاط میانی اضلاع را E و F و G و H بنامیم. با استفاده از روابط زیر:

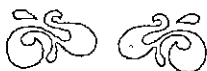
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} \text{ یا } a + b = -d - c$$

$$\vec{EB} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{1}{2} a \text{ و } \vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{1}{2} b$$

$$\vec{DG} = \frac{1}{2} \vec{DC} = -\frac{1}{2} c \text{ و } \vec{HD} = \frac{1}{2} \vec{AD} = -\frac{1}{2} d$$

$$(\vec{EF} = \vec{HG} \text{ بپذیرید.})$$

ادامه دارد...



با توجه به تساویهای: $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD}$ و $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$ داریم:

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \frac{1}{2} (\vec{CB} + \vec{BA}) + \vec{AB} + \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AD}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{BA} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AD} \\ &= \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{BA} \\ &= \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{AB} - \vec{AB} \\ &= \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \end{aligned}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 + 4\vec{MN}^2 &= \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 + 4 \left[\frac{1}{4} (\vec{CB} + \vec{AD})^2 \right] \\ &= \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 + \vec{CB}^2 + \vec{AD}^2 + 2\vec{CB} \cdot \vec{AD} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC})^2 + (\vec{BC} + \vec{CD})^2 + \vec{CB}^2 + \vec{AD}^2 + 2\vec{CB} \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 \\ &\quad + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD} + \vec{BC}^2 + \vec{DA}^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{DA} \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + \vec{DA}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} \\ &\quad + 2\vec{BC}^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD} + 2\vec{BC} \cdot \vec{DA} \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + \vec{DA}^2 + 2\vec{BC} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + \vec{DA}^2 = 0 \end{aligned}$$

و چون داریم:

پس خواهیم داشت:

$$\vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 + 4\vec{MN}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + \vec{DA}^2$$

تمرین:

۱- اگر P و Q و R نقاط میانه اضلاع سه‌بر ABC باشند، ثابت کنید که برای هر نقطه دلخواه O برابری زیر برقرار است:

$$\vec{oA} + \vec{oB} + \vec{oC} = \vec{oP} + \vec{oQ} + \vec{oR}$$