

بردارها

(قسمت دوم)

سید محمد رضا هاشمی موسوی

اندازه جبری تصویر یک بردار بر یک محور

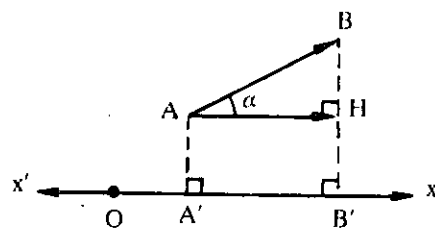
بردار $\vec{AB}$ و محور $\vec{OX}$ واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم، تصویر بردار $\vec{AB}$ روی $\vec{OX}$ را مشخص می‌کنیم. اگر زاویه بردار $\vec{AB}$ با محور $\vec{OX}$ برابر α باشد، از A پاره خط AH را موازی محور رسم می‌کنیم، در مثل قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$|\cos \alpha| = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB |\cos \alpha|$$

و با توجه به رعایت جهت خواهیم داشت:

$$\vec{A'B'} = |\vec{AB}| \cos \alpha$$

یعنی؛ اندازه جبری تصویر یک بردار بر یک محور برابر است با حاصل ضرب اندازه بردار در کسینوس زاویه بین بردار و محور.



حالات خاص

$$1. \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \vec{A'B'} = \vec{AB}$$

2. اگر $0 \leq \alpha < 90^\circ$ باشد جهت $\vec{A'B'}$ با جهت مثبت محوری یکی

خواهد بود و در نتیجه اندازه جبری $\vec{A'B'}$ مثبت خواهد بود و هنگامی که $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ باشد، جهت $\vec{A'B'}$ با جهت مثبت محور یکی نیست و $\vec{A'B'}$ منفی خواهد بود.

$$3. \alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \vec{A'B'} = 0$$

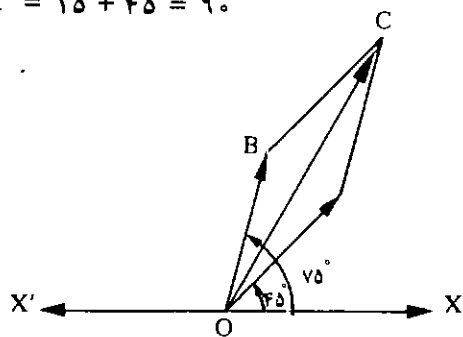
مثال ۱۲: دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ به طولهای مساوی با محور $\vec{OX}$ به ترتیب زوایای 45° و 75° می‌سازند. زاویه بردار $\vec{OA} + \vec{OB}$ با محور $\vec{OX}$ چند درجه است؟

حل: اگر $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ باشد، چون $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$ است، پس چهار ضلعی $OACB$ لوزی است و قطر $\vec{OC}$ آن مجموع هندسی بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ است، و نیمساز زاویه $\angle BOA$ نیز می‌باشد. اما داریم:

$$\angle BOA = \angle BOX - \angle AOX = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

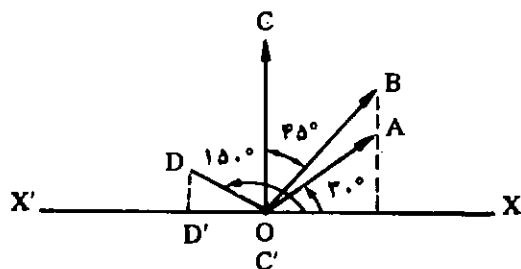
پس $\angle COA = 15^\circ$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\angle COX = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$



$$\vec{b} = \overrightarrow{OB'} = |\vec{b}| \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC'} = |\vec{c}| \cos 90^\circ = 5 \times 0 = 0$$



$$\vec{d} = \overrightarrow{OD'} = |\vec{d}| \cos 150^\circ = \sqrt{3} \cos (180^\circ - 30^\circ) \\ = -\sqrt{3} \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}$$

طبق قضیه اگیر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{R}$ یعنی: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{R}$ داریم:

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{R}$$

پس می توان نوشت:

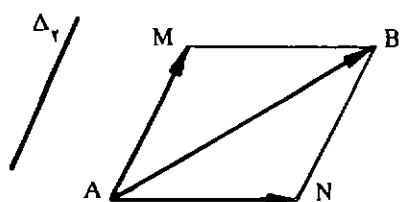
$$\vec{R} = 3 + 3 + 0 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad (\text{اندازه جبری تصویر بردار بر آیند})$$

تذکر: اندازه جبری یک بردار وقتی معنی دارد که بردار را هم راستای یک محور در نظر بگیریم. بنابراین اگر بردار $\overrightarrow{AB}$ هم راستای محور $X'OX$ باشد آنگاه اندازه جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را با علامت $\overrightarrow{AB}$ نشان می دهیم.

◀ تجزیه یک بردار به دو بردار با راستاهای معین

برای تجزیه بردار $\overrightarrow{AB}$ به دو مؤلفه در راستاهای Δ_1 و Δ_2 از A و B خطوطی به موازات این دو امتداد رسم می کنیم تا متوازی الاضلاع $AMBN$ به وجود آید. بردارهای $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ را مؤلفه های بردار $\overrightarrow{AB}$ در راستاهای Δ_1 و Δ_2 می نامند.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$

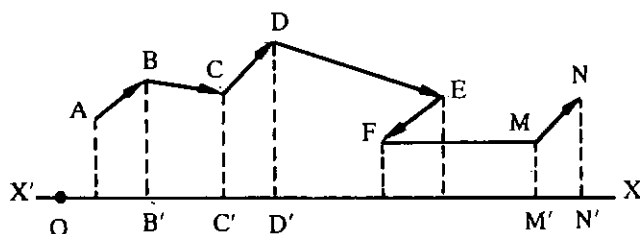


◀ تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور

هرگاه $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \dots + \overrightarrow{MN}$ و تصویر نقاط A و B و C و D و E و ... و M و N بر محور $X'OX$ را A' و B' و C' و D' و E' و ... و M' و N' بنامیم بین اندازه های جبری تصاویر بردارهای فوق بر محور $X'OX$ رابطه زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{A'N'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'E'} + \dots + \overrightarrow{M'N'}$$

بنابراین اندازه جبری تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور، برابر است با جمع جبری تصاویر آن بردارها بر آن محور.



مثال ۱۳: $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ و $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ و $|\vec{c}| = 5$ و $|\vec{d}| = \sqrt{3}$ و زوایای آنها با محور $X'OX$ به ترتیب 30° و 45° و 90° و 150° است.

۱. بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را به مبدأ نقطه O رسم و مجموع آنها را بیابید.

۲. اندازه جبری تصویر هر بردار را بر محور $X'OX$ تعیین کنید.

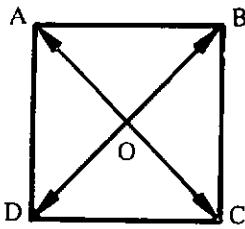
۳. اندازه جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها بر محور $X'OX$ را بیابید.

حل: بردارهای $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ و $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ را با شرایط مشخص شده رسم می کنیم و تصاویر نقاط A و B و C و D را روی محور $X'OX$ به ترتیب A' و B' و C' و D' می نامیم. در این صورت خواهیم داشت: (منظور از $\vec{a}$ ، اندازه جبری تصویر بردار $\vec{a}$ روی محور $X'OX$ است).

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA'} = |\vec{a}| \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD})$$

$$= \vec{O} + \vec{O} = \vec{O}$$



۲. به طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$

حل: در متوازی الاضلاع ABCD می توان نوشت:

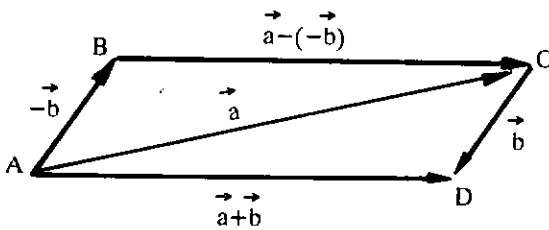
$$\vec{BC} = \vec{a} - (-\vec{b})$$

$$\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{BC} = \vec{AD}$$

پس رابطه مطلوب نتیجه می شود:

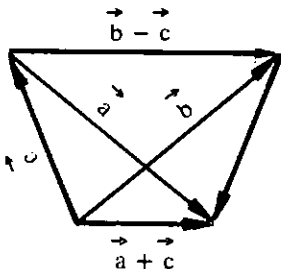
$$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$



تمرین: به طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$$

راهنمایی: به شکل زیر توجه کنید:



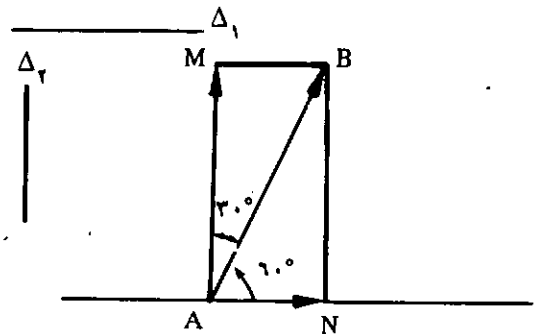
۳. به طریقه برداری نشان دهید هرگاه خطی اواسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کند، موازی با ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

حل: در مثلث ABC داریم:

$$\vec{MA} + \vec{AN} = \vec{MN}$$

(۱)

مثال ۱۴: بردار $\vec{AB}$ به طول ۵ سانتی متر را به دو مؤلفه در راستاهای عمود بر هم Δ_1 و Δ_2 تجزیه کنید در صورتی که راستای Δ_2 با $\vec{AB}$ زاویه 30° بسازد، آنگاه اندازه مؤلفه ها را از طریق محاسبه پیدا کنید.



حل: از نقاط A و B خطوطی موازی Δ_1 و Δ_2 رسم می کنیم تا

مستطیل AMBN به وجود آید. $\vec{AN}$ و $\vec{AM}$ مؤلفه های بردار $\vec{AB}$ در

دو راستای Δ_1 و Δ_2 می باشند، زیرا:

برای محاسبه اندازه این مؤلفه ها در مثلث قائم الزاویه ANB داریم:

$$|\vec{AN}| = |\vec{AB}| \cos 60^\circ = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{AN}| = \frac{5}{2}$$

$$|\vec{NB}| = |\vec{AM}| = |\vec{AB}| \cos 30^\circ$$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{AM}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

در این جا برای آشنایی با مسائل بردارها مسائل متنوعی را همراه با

حلی آنان ارائه می دهیم.

مسائل با حل:

۱. از نقطه O مرکز مربع ABCD (مطابق شکل زیر) به رئوس آن

وصل می کنیم. نشان دهید که چرا مجموع چهار بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و

$\vec{OC}$ و $\vec{OD}$ برابر بردار صفر است.

حل: داریم:

$$\vec{OA} = -\vec{OC} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{O} \quad (1)$$

$$\vec{OB} = -\vec{OD} \Rightarrow \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{O} \quad (2)$$

با استفاده از تساویهای (۱) و (۲) خواهیم داشت:

طرفین تساویهای (۱) و (۲) را به ترتیب در n و m ضرب می‌کنیم:

$$\vec{nOA} + \vec{nAM} = \vec{nOM} \quad \text{و} \quad \vec{mOB} + \vec{mBM} = \vec{mOM}$$

در این جا دو تساوی بالا را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$\vec{nOA} + \vec{nAM} + \vec{mOB} + \vec{mBM} = (m+n) \vec{OM} \quad (۳)$$

اما طبق فرض داریم:

$$\vec{nAM} = \vec{mMB} \quad \text{یا} \quad \vec{nAM} - \vec{mMB} = \vec{O}$$

و با توجه به $\vec{MB} = -\vec{BM}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{nAM} + \vec{mBM} = \vec{O} \quad (۴)$$

اگر در تساوی (۳) رابطه (۴) را اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{nOA} + \vec{mOB} = (m+n) \vec{OM} \quad (۵)$$

تساوی (۵) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\vec{nOA} + \vec{mOB} - (m+n) \vec{OM} = \vec{O}$$

تساوی (۵) رابطه مطلوب است که آن را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{nOA} + \vec{mOB}}{n+m}$$

بدیهی است اگر M وسط AB باشد ($m=n$)، خواهیم داشت:

$$m=n : \vec{OM} = \frac{\vec{nOA} + \vec{nOB}}{n+n} = \frac{\vec{n(OA+OB)}}{2n} =$$

$$= \frac{\vec{OA+OB}}{2} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA+OB}}{2} \quad (۶)$$

تساوی (۶) برادر مکان نقطه وسط یک برادر را بر حسب برادر مکان ابتدا و انتهای آن به دست می‌دهد.

تمرین: هرگاه نقطه M وسط پاره خط AC باشد (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$$

راهنمایی:

$$\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM} \quad (۱) \quad \text{در مثلث OAM داریم}$$

طرفین این تساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\vec{MA} + 2\vec{AN} = 2\vec{MN}$$

ولی طبق فرض داریم:

$$2\vec{MA} = \vec{BA} \quad \text{و} \quad 2\vec{AN} = \vec{AC}$$

بنابراین از تساوی (۱) تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\vec{BA} + \vec{AC} = 2\vec{MN} \quad (۲)$$

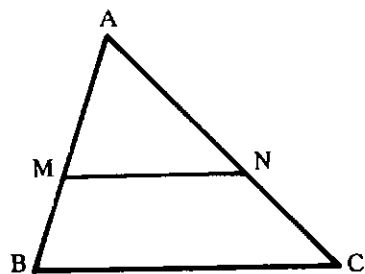
از طرفی در مثلث ABC داریم:

$$\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC} \quad (۳)$$

از مقایسه روابط (۲) و (۳) رابطه مطلوب به دست می‌آید:

$$2\vec{MN} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

با توجه به تعریف ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار نتیجه می‌شود که MN موازی BC بوده و طول آن نصف BC است.

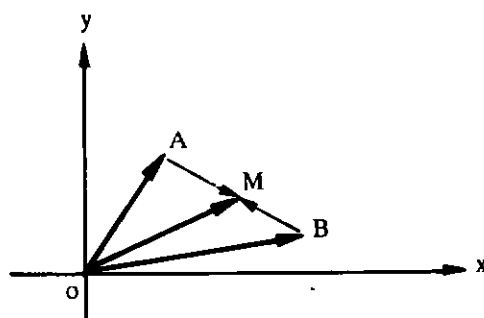


۴. در شکل زیر فرض می‌کنیم:

$$\frac{\vec{AM}}{\vec{MB}} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ و } n \text{ اعداد حقیقی می‌باشند})$$

نشان دهید که:

$$\vec{nOA} + \vec{mOB} = (m+n) \vec{OM}$$



حل: در مثلث OAM داریم:

$$\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM} \quad (۱)$$

همچنین در مثلث OBM می‌توان نوشت:

$$\vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OM} \quad (۲)$$

حل: به ترتیب می توان نوشت:

$$\vec{QB} + 2\vec{QP} = (K - 2)\vec{PB}$$

$$\vec{QB} + 2\vec{QP} = K\vec{PB} - 2\vec{PB}$$

$$\vec{QB} + 2\vec{QP} + 2\vec{PB} = K\vec{PB}$$

$$\vec{QB} + 2(\vec{QP} + \vec{PB}) = K\vec{PB}$$

$$\vec{QB} + 2\vec{QB} = K\vec{PB}$$

$$3\vec{QB} = K\vec{PB}$$

بنابراین فرض مسئله نقاط P و Q بر هم منطبق هستند، بنابراین: $\vec{QB} = \vec{PB}$
و در نتیجه خواهیم داشت:

$$3\vec{PB} = K\vec{PB} \Rightarrow K = 3$$

۷. هرگاه داشته باشیم: $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{OB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ و

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
 بردار $\vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 4\vec{AC})$ را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 4\vec{AC}) = \frac{1}{3}(\vec{OB} - \vec{OA} + 4\vec{OC} - 4\vec{OA})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OB} + 4\vec{OC} - 5\vec{OA}) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$- 5\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 \\ -15 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -23 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -19 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

تمرین: هرگاه A (4, 5) و B (3, -1) و C (-2, 2) باشد؛
مطلوب است تعیین مختصات نقطه X از تساوی زیر:

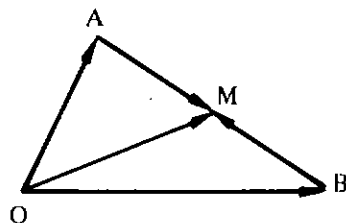
$$\vec{XA} = \vec{BC}$$

در مثلث OBM داریم: (۲) $\vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OM}$

طبق فرض چون M وسط AB است پس داریم:

$$\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0} \text{ یا } \vec{AM} = \vec{MB}$$

از جمع روابط (۱) و (۲) استفاده از فرض رابطه مطلوب را نتیجه بگیریم.



۵. متوازی الاضلاع OABC مفروض است، روی قطر AC نقطه M طوری
واقع است که $AM = 2MC$ ، ثابت کنید:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\vec{AM} = 2\vec{MC}$$

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\vec{OM} - \vec{OA} = 2(\vec{OC} - \vec{OM})$$

$$\vec{OM} - \vec{OA} = 2\vec{OC} - 2\vec{OM} \Rightarrow 3\vec{OM} = 2\vec{OC} + \vec{OA}$$

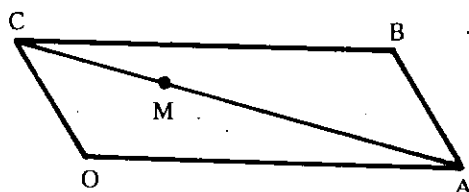
$$\Rightarrow 3\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{OC} + \vec{OA} \quad (1)$$

اما با توجه به شکل و استفاده از قانون متوازی الاضلاع داریم:

$$\vec{OC} + \vec{OA} = \vec{OB} \quad (2)$$

بنابراین با اثر دادن رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$3\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{3}$$



۶. در تساوی برداری زیر مقدار K را چنان تعیین کنید که نقاط P و Q
بر هم منطبق شوند:

$$\vec{QB} + 2\vec{QP} = (K - 2)\vec{PB}$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BM} + \frac{1}{2} \vec{CM} \quad (۳)$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

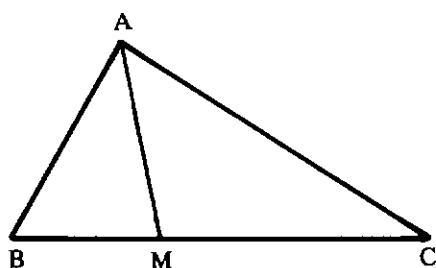
$$\frac{\vec{BM}}{\vec{MC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{MC} \Rightarrow \vec{BM} - \frac{1}{2} \vec{MC} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{BM} + \frac{1}{2} \vec{CM} = \vec{0} \quad (۴)$$

با اثر دادن رابطه (۴) در رابطه (۳) داریم:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

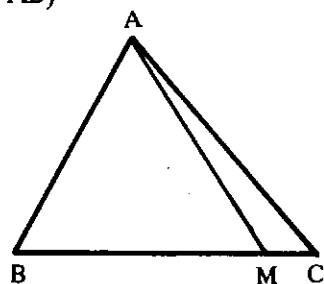
بنابراین $\vec{AM}$ بر حسب دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ چنین است:

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}}{1}$$



۱۰. هرگاه M پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{1}{10}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\vec{AM} = \frac{1}{11} (10 \vec{AC} + \vec{AB})$$



حل: در مثل AMC داریم:

$$\vec{AC} + \vec{CM} = \vec{AM} \Rightarrow 10 \vec{AC} + 10 \vec{CM} = 10 \vec{AM} \quad (۱)$$

و در مثل ABM داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM} \quad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$11 \vec{AM} = 10 \vec{AC} + \vec{AB} + 10 \vec{CM} + \vec{BM} \quad (۳)$$

اما طبق فرض مسئله داریم:

راهنمایی:

$$\vec{XA} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{OA} - \vec{OX} = \vec{OC} - \vec{OB}$$

داریم:

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{OA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی بردارهای ستونی در تساوی داده شده، بردار $\vec{OX}$ را تعیین کنید.

۸. بردار $3\vec{i} + 4\vec{j}$ را به صورت ترکیب خطی دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

حل: با توجه به فرض مسئله باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} 3\vec{i} + 4\vec{j} &= X(2\vec{i} + \vec{j}) + Y(\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= 2X\vec{i} + X\vec{j} + Y\vec{i} + 2Y\vec{j} \\ &= (2X + Y)\vec{i} + (X + 2Y)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X + Y = 3 \\ X + 2Y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{3} \\ Y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$3\vec{i} + 4\vec{j} = \frac{2}{3}(2\vec{i} + \vec{j}) + \frac{5}{3}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

تمرین: بردار $7\vec{i} + 4\vec{j}$ را به صورت ترکیب خطی دو بردار $3\vec{i} + 4\vec{j}$ و $2\vec{i} + 3\vec{j}$ بنویسید.

راهنمایی: از مقایسه طرفین تساوی، مقادیر X و Y را به دست آورید.

۹. سه نقطه A و B و C مفروضند و نقطه M بردار BC را به نسبت $\frac{2}{3}$ قطع می‌کند. بردار $\vec{AM}$ را بر حسب دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ بنویسید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ 2\vec{AM} &= 2\vec{AB} + 2\vec{BM} \quad (۱) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AC} + \vec{CM} \\ 2\vec{AM} &= 2\vec{AC} + 2\vec{CM} \quad (۲) \end{aligned}$$

در نقطه H قطع کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که AH بر BC عمود است.

فرض می‌کنیم که CS و BS و AS و AC و BC و AB نمایشهای بردارها باشند. چون ارتفاع مثلث است، بنابراین حاصل ضرب داخلی دو بردار BS و AC صفر است:

$$\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad (1)$$

همچنین از این که CM ارتفاع مثلث است، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (2)$$

برای اثبات این که AH بر BC عمود است، نشان می‌دهیم:

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (3)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \quad (4)$$

با استفاده از تساوی (۴) رابطه (۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned} \quad (5)$$

همچنین با توجه به شکل داریم:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} \quad (6)$$

و

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} \quad (7)$$

با جایگزینی تساویهای (۶) و (۷) در رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}) \cdot \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

با تعویض $\overrightarrow{BA}$ با $-\overrightarrow{AB}$ و استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 \\ &= -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \Rightarrow \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

از رابطه (۸) نتیجه می‌شود که AH نیز بر BC عمود است. و در نتیجه ارتفاعات BN و CM و AH در یک نقطه برخورد دارند.

۱۲. به طریق دیگر برداری ثابت کنید سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{1}{1} \Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

(۴)

با اثر دادن رابطه (۴) در رابطه (۳) داریم:

$$1 \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+1} (1 \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

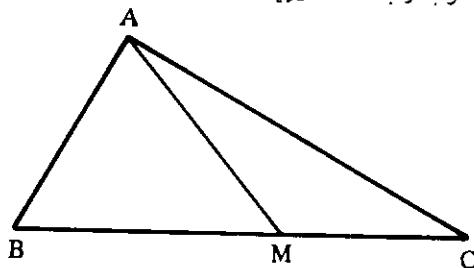
تمرین: هرگاه M پاره خط BC را به نسبت $\frac{3}{2}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} (2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{AC})$$

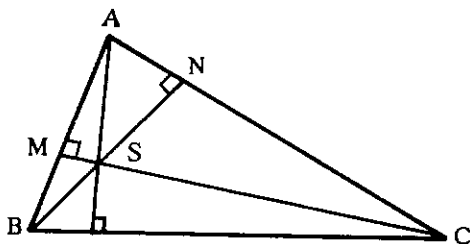
راهنمایی: در مثلث ABM داریم: (۱)

و در مثلث ACM داریم: (۲)

طرفین رابطه (۱) را در عدد ۲ و طرفین رابطه (۲) را در عدد ۳ ضرب کنید و سپس رابطه‌های به دست آمده را با هم جمع کنید. پس از استفاده از فرض مسئله یعنی $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$ یا $2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ ، رابطه مطلوب را به دست آورید.

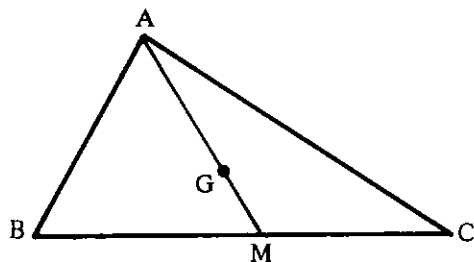


۱۱. به طریق دیگر برداری ثابت کنید که ارتفاعات هر مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (متقارب‌اند).



حل: فرض می‌کنیم ABC مثلثی است که ارتفاعات BN و CM آن در نقطه S همدیگر را قطع می‌کنند. خطی از A و S می‌کشیم که BC را

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$



زاهنمایی: با توجه به شکل داریم:

$$\vec{BM} = \vec{MC} \quad (\text{پاره خط } AM \text{ میانه است})$$

$$\vec{OM} - \vec{OB} = \vec{OC} - \vec{OM}$$

$$2\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{OC} \quad (1)$$

همچنین بنا به خاصیت برخورد میانه داریم:

$$\frac{\vec{AG}}{\vec{GM}} = 2 \Rightarrow 2\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OM} \quad (2)$$

بین رابطه‌های (۱) و (۲) بردار OM را حذف کنید و رابطه مطلوب را نتیجه بگیرید.

تمرین ۲: اگر G_1 و G_2 به ترتیب مراکز ثقل (محل تلاقی سه میانه) مثلثهای ABC و XYZ باشند، ثابت کنید:

$$\vec{AX} + \vec{BY} + \vec{CZ} = 3\vec{G_1G_2}$$

راهنمایی: با توجه به تمرین (۱) می توان نوشت:

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \quad (1)$$

$$\vec{OG_2} = \frac{\vec{OX} + \vec{OY} + \vec{OZ}}{3} \quad (2)$$

از تفاضل رابطه (۱) و (۲) و با توجه به تساویهای زیر:

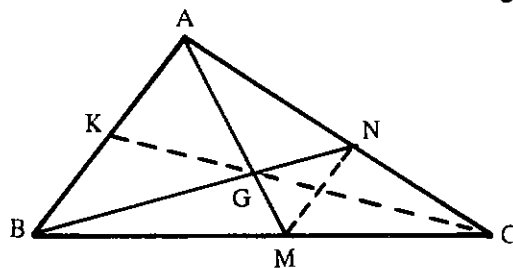
$$\vec{OG_2} - \vec{OG_1} = \vec{G_1G_2} \quad \text{و} \quad \vec{OX} - \vec{OA} = \vec{AX}$$

$$\vec{OY} - \vec{OB} = \vec{BY} \quad \text{و} \quad \vec{OZ} - \vec{OC} = \vec{CZ}$$

رابطه مطلوب را نتیجه بگیرید.

۱۳. به طریقه برداری ثابت کنید، در هر متوازی الاضلاع، اضلاع متقابل با هم برابر و قطرها همدیگر را نصف می کنند.

همدیگر را قطع می کنند که فاصله آن از هر رأس، $\frac{2}{3}$ طول میانه نظیر آن رأس است.



حل: فرض کنیم نقطه G محل تلاقی میانه های AM و BN باشد، بنابراین داریم:

$$\vec{CN} = \frac{1}{2} \vec{CA}$$

$$\vec{CM} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

$$\vec{CN} - \vec{CM} = \frac{1}{2} (\vec{CA} - \vec{CB})$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{BA} \quad (1)$$

تساوی (۱) را نسبت به مبدأ G می توان چنین نوشت:

$$\vec{GN} - \vec{GM} = \frac{1}{2} (\vec{GA} - \vec{GB})$$

$$\vec{GN} + \frac{1}{2} \vec{GB} = \vec{GM} + \frac{1}{2} \vec{GA} \quad (2) \quad \text{و یا:}$$

در تساوی (۲) اگر طرف دوم مخالف صفر باشد، برداری در راستای AM است و طرف اول برداری در راستای BN خواهد بود و چون این دو بردار متقاطعند، نمی توانند برابر باشند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

$$\vec{GM} + \frac{1}{2} \vec{GA} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{GN} + \frac{1}{2} \vec{GB} = \vec{0}$$

و یا:

$$\vec{GM} = -\frac{1}{2} \vec{GA} = \frac{1}{2} \vec{AG} \quad (3)$$

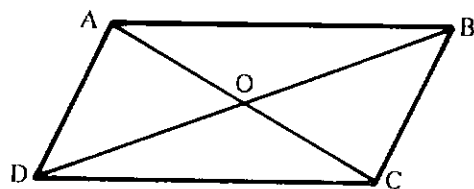
$$\vec{GN} = -\frac{1}{2} \vec{GB} = \frac{1}{2} \vec{BG} \quad (4)$$

تساویهای (۳) و (۴) نشان می دهند که میانه AM میانه BN را به نسبت ۲ تقسیم می کند و همین طور میانه BN میانه AM را به نسبت ۲ تقسیم می کند. با همین استدلال ثابت می شود که میانه CK نیز میانه AM را به نسبت ۲ تقسیم می کند و در نتیجه میانه CK نیز از نقطه G می گذرد که در این جا حکم ثابت می شود.

تمرین ۱: مثلث ABC مفروض است، اگر G محل تلاقی سه میانه مثلث و O نقطه دلخواهی از صفحه ABC باشد، ثابت کنید:

و یا:

$$\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} \quad (۵)$$

حل: در شکل مقابل چون AB با DC موازی است، داریم:

$$\vec{AB} = m \vec{DC}$$

(۱)

و چون AD با BC موازی است، بنابراین:

$$\vec{BC} = n \vec{AD}$$

(۲)

از جمع تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = m \vec{DC} + n \vec{AD} \quad (۳)$$

از طرفی با توجه به حاصل جمع بردارها داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} \quad (۴)$$

از تساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$m \vec{DC} + n \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

و یا:

$$(m - 1) \vec{DC} = (1 - n) \vec{AD}$$

اگر فرض کنیم $1 - n \neq 0$ ، در این صورت داریم:

$$\vec{AD} = \frac{m - 1}{1 - n} \vec{DC}$$

یعنی؛ AD و DC هم‌راستا می‌باشند، که خلاف فرض است، بنابراینلازم است $1 - n = 0$ ، یعنی؛ $n = 1$ و چون $\vec{DC} \neq \vec{0}$ ، پس: $m - 1 = 0$ و در نتیجه $m = 1$ و بنابراین:

$$\vec{AB} = \vec{DC} \text{ و } \vec{BC} = \vec{AD}$$

برای اثبات قسمت دوم؛ اگر O محل تلاقی اقطار باشد، داریم:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ و } \vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD}$$

و چون $\vec{AB} = \vec{DC}$ ؛ بنابراین داریم:

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$$

و یا:

در تساوی (۵) اگر $\vec{OA} + \vec{OC} \neq \vec{0}$ ، در این صورت طرف دوم تساوی (۵) برداری مخالف صفر در راستای AC و طرف اول برداری در راستای BD است و این محال است، زیرا دو راستای AC و BD متقاطعند، پس لازم است داشته باشیم:

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0} \text{ و } \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$$

و یا:

$$\vec{OA} = -\vec{OC} = \vec{CO} \text{ و } \vec{OB} = -\vec{OD} = \vec{DO}$$

که در این جا حکم ثابت می‌شود.

تمرین: به طریقهٔ برداری ثابت کنید اضلاع لوزی با هم برابرند و قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند.

راهنمایی: مطابق راه حل مسألهٔ (۱۳) عمل کنید.

۱۴. ثابت کنید، X و Y بر هم منطبق هستند؛ هرگاه داشته باشیم:

$$\vec{BY} + \vec{AB} = \vec{AY} + \vec{XY}$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned} \vec{BY} + \vec{AB} &= \vec{AY} + \vec{XY} \\ \Rightarrow \vec{AB} - \vec{AY} &= \vec{XY} - \vec{BY} \\ \Rightarrow \vec{YA} + \vec{AB} &= \vec{XY} + \vec{YB} \\ \Rightarrow \vec{YB} &= \vec{XB} \end{aligned}$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که X و Y بر هم منطبق هستند.تمرین: ثابت کنید، PQ و ZY مساوی‌اند، اگر داشته باشیم:

$$\vec{SQ} = \vec{ZY} + \vec{SP}$$

راهنمایی: از رابطهٔ داده شده نتیجه بگیرید:

$$\vec{PS} + \vec{SQ} = \vec{ZY} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{ZY}$$

