

این مقاله به بررسی بخش پذیری عبارت $P(x)$ بر عبارت $Q(x)$ خواهیم پرداخت، همچنین روش هایی برای یافتن باقی مانده تقسیم عبارت جبری $P(x)$ بر عبارت جبری $Q(x)$ را در پی می آوریم.

نشانه

خ

پ

پ

پایه ی سوم ریاضی
برای دانش آموزان

ی

ر

ی

● احمد قندهاری

الف) شرط لازم و کافی برای این که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر باشد، آن است که: $P(a) = 0$ و $P(x)$ را باقی مانده ی تقسیم گویند. مثال ۱. اگر عبارت $P(x) = x^3 - 2ax + 8$ بر $(x-2)$ بخش پذیر باشد، مقدار عددی a را بیابید.

حل: باید $P(2) = 0$

$$P(2) = (2)^3 - 2a(2) + 8 = 0 \Rightarrow 8 - 4a + 8 = 0 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

ب) شرط لازم و کافی برای این که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش پذیر باشد، این است که:

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ P(b) = 0 \end{cases}$$

تعمیم: شرط لازم و کافی برای این که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)$ بخش پذیر باشد این است که:

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ P(b) = 0 \\ P(c) = 0 \\ \vdots \\ P(k) = 0 \end{cases}$$

مثال ۲. a و b را چنان بیابید که عبارت

$P(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 8$ بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر باشد.
حل: روش اول

برای آن که $P(x)$ بر $(x-2)(x+2)$ بخش پذیر باشد، باید: $P(2) = 0$ ؛ پس:

$$\begin{cases} P(2) = a(2)^3 + b(2)^2 + 4(2) - 8 = 0 \\ P(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + 4(-2) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 8b + 8 - 8 = 0 \\ 16a - 8b - 8 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 8b = 0 \\ 16a - 8b = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32a = 16 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$16a + 8b = 0 \Rightarrow 16\left(\frac{1}{2}\right) + 8b = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 8b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

روش دوم (خیلی مهم است)

می توانیم بنویسیم $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ و در عبارت $P(x)$ ، به جای هر x^2 ، عدد ۴ را قرار دهیم. عبارت حاصل را متحد با صفر قرار می دهیم.

$$P(x) = a(x^2)^2 + bx(x^2) + 4x - 8$$

$$x^2 = 4$$

$$R = a(4)^2 + bx(4) + 4x - 8 = 16a + 4bx + 4x - 8$$

تعیین باقی مانده ی قسمت دوم:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 + ax + 2b$$

$$R_1 = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b$$

$$a = b \Rightarrow R_1 = 4$$

ج) اگر باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ برابر R_1 ، باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-b)$ برابر R_2 ، و باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر $mx+n$ باشد، آن گاه m و n از دستگاه
$$\begin{cases} m(a) + n = R_1 \\ m(b) + n = R_2 \end{cases}$$
 به دست می آید.

اثبات: فرض می کنیم خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ ، $Q(x)$ و باقی مانده ی تقسیم $mx+n$ باشد. می توان نوشت:

$$P(x) = (x-a)(x-b).Q(x) + mx + n \quad (I)$$

در ضمن داریم: $P(b) = R_2$ و $P(a) = R_1$ در رابطه ی (I) به جای x ، یک بار a و یک بار b را قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(a) = (a-a)(a-b).Q(a) + m(a) + n \\ P(b) = (b-a)(b-b).Q(b) + m(b) + n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = m(a) + n \\ R_2 = m(b) + n \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m(a) + n = R_1 \\ m(b) + n = R_2 \end{cases}$$

مثال ۶. اگر باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ برابر ۷ و باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-2)$ برابر ۳ باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ را بر $(x-a)(x-b)$ بیابید.

حل: فرض می کنیم باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ برابر $mx+n$ باشد. بنابه درس می توان نوشت:

$$\begin{cases} m(a) + n = R_1 \\ m(b) + n = R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(1) + n = 7 \\ m(2) + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = -7 \\ 2m + n = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = -4, m + n = 7 \Rightarrow -4 + n = 7 \Rightarrow n = 11$$

پس باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ $(-4x+11)$ است.

مثال ۷. اگر باقی مانده ی تقسیم عبارت های $x^2 - 8x + 12$ و $x^2 + ax^2 + bx^2 - 4$ بر $(x^2 - 2)$ یکی باشند، a و b را بیابید.

$$x^2 + ax^2 + bx^2 - 4 = (x^2)^2 + ax(x^2) + bx^2 - 4$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \quad \text{الف)}$$

$$R_1 = (2)^2 + ax(2) + b(2) - 4$$

$$R_1 = 4 + 2ax + 2b - 4 \Rightarrow R_1 = 2ax + 2b$$

$$\text{ب)} \quad x^2 - 8x + 12 \quad x^2 = 2$$

$$R_2 = 2 - 8x + 12 \Rightarrow R_2 = -8x + 14$$

$$R_1 \equiv R_2 \Rightarrow 2ax + 2b = -8x + 14$$

$$R = (4b + 4)x + (16a - 8) \equiv 0$$

$$\begin{cases} 4b + 4 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 16a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

تذکر: وقتی عبارتی از هر درجه متحد با صفر باشد، باید ضریب های همه ی جملات را مساوی صفر قرار دهیم. هم چنین عدد ثابت را هم مساوی صفر قرار دهیم.

مثال ۳. باقی مانده ی تقسیم $P(x) = x^{16} + x^9 - x^4 + 1$ بر $(x^2 + 1)$ بیابید.

حل: به روش دوم

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$P(x) = x(x^2)^8 + (x^2)^4 - x(x^2) + 1$$

$$R = x(-1)^8 + (-1)^4 - x(-1) + 1$$

$$R = -x - 1 + x + 1 \Rightarrow R = 0$$

مثال ۴. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x) = ax^2 + bx^2 + 4x - 3$ بر $(x^2 + 2)$ بخش پذیر باشد.

حل: ناچاریم این مسأله را به روش دوم حل کنیم، چون $(x^2 + 2)$ تجزیه نمی شود.

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$$

ممکن است سؤال کنید، آیا ممکن است x^2 برابر -2 شود؟ در پاسخ باید عرض کنم: بله. زیرا در ریاضیات مجموعه ای وجود دارد به نام مجموعه ی اعداد مختلط که در آن x^2 می تواند مساوی -2 باشد.

$$P(x) = ax(x^2) + b(x^2) + 4x - 3 \quad \text{و} \quad x^2 = -2$$

$$R = ax(-2) + b(-2) + 4x - 3$$

$$R = -2ax - 2b + 4x - 3 \equiv 0$$

$$R = (4 - 2a)x - (2b + 3) \equiv 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$2b + 3 = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

مثال ۵. اگر باقی مانده ی تقسیم عبارت $(ax^4 + bx^4 + 1)$ بر $(x^4 + 1)$ عدد ۱ باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم عبارت $(x^2 + ax + b)$ بر $(x + 2)$ را بیابید.

حل: به روش دوم

$$x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1$$

$$ax^4 + bx^4 + 1 = a(x^4) + b(x^4) + 1 \quad \text{و} \quad R_1 = 1$$

$$R_1 = a(-1) + b(-1) + 1 = 1$$

$$\Rightarrow a - b + 1 = 1 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

تقریر اندیشه

رحیم خیرالله زاده
دبیر ریاضی ناحیه ۲ شهرری

اثبات اصل لانه کبوتری در حالت کلی

صورت قضیه: اگر n کبوتر در k لانه قرار گیرند، به طوری که هر لانه گنجایش n کبوتر داشته باشد، آن گاه لانه ای یافت می شود که حداقل دارای $1 + \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ کبوتر باشد.

اثبات: فرض می کنیم تعداد کبوترها در لانه ی i ام برابر x_i باشد که در آن: $1 \leq i \leq k$ و $0 \leq x_i \leq n$. در این صورت، حکم مسئله معادل این خواهد بود که ثابت کنیم:

$$\exists i: x_i \geq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$$

برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت در تمام لانه ها،

تعداد کبوترها کمتر از $1 + \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ خواهد بود؛ یعنی:

$$\forall i: x_i < \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \quad (\text{فرض خلف})$$

حال نشان می دهیم که به تناقض می رسیم:
می دانیم $([x] + 1) < x < [x]$

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left[\frac{n-1}{k} \right] \leq n-1$$

هر x_i از ماکزیمم مقدار x_i ها، یعنی: $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ کوچک تر یا با آن ها مساوی است.

به سادگی نتیجه می شود: $n \leq n-1$ که یک تناقض آشکار است.

بنابراین فرض خلف غلط است، یعنی حکم قضیه درست است و اثبات کامل می شود.

$$\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

$$2b = 14 \Rightarrow a = 7$$

مثال ۸. اگر $x = \sqrt{2}$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه ی $f(x) = x^3 - (4 + \sqrt{2})x^2 + (3 + 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید.

حل: باید $f(x)$ را بر $(x - \sqrt{2})$ تقسیم کنیم و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار دهیم:

$$x^3 - 4x^2 - \sqrt{2}x^2 + 3x + 4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} \Big| x - \sqrt{2}$$

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

پس $x = 3$ و $x = 1$ صفرهای دیگر تابع هستند.

آزمون ۱. اگر $f(2) = f(-2) = 5$ ، آن گاه کدام یک از عبارت های زیر بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر است؟

- الف) $f(x) - 4$ (ب) $f(x) - 5$
ج) $f(x) - 2$ (د) $f(x) + 2$

حل: گزینه ی ب. زیرا عبارتی بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر است که به ازای $x = 2$ و $x = -2$ برابر صفر شود. پس گزینه ی ب درست است.

آزمون ۲. اگر باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ مساوی ۸ باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $f(x^2 - 7)$ بر $(x + 3)$ کدام است؟

- الف) ۸ (ب) ۷
ج) ۶ (د) ۵

حل: گزینه ی الف. داریم:

$$f(2) = 8 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f(9 - 7) = f(2) = 8$$

آزمون ۳. اگر باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x^2 - 8)$ صفر باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $f(x^2)$ بر $x^2 + 2x^2 + 4$ کدام است؟

- الف) صفر (ب) x
ج) $x - 1$ (د) $2x$

حل: گزینه ی الف.

$$f(x) = (x^2 - 8)Q(x)$$

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} x^2 \Rightarrow f(x^2) = (x^4 - 8)Q(x^2) \\ \Rightarrow f(x^2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2x^2 + 4)Q(x^2) \Rightarrow R = 0$$

جدید