

بخش پذیری

اشاره

در این مقاله به تعریف بخش پذیری چند جمله ای $P(x)$ بر $(x-a)$ خواهیم پرداخت، سپس مسائل و آزمون های متفاوتی را در این زمینه طرح و حل می کنیم.

$(x-2)$ را بیابید.

حل: چون $P(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است، پس باید

$$P(-1) = 0$$

$$P(-1) = -1 + 4 + 5 + m = 0 \Rightarrow m = -8$$

حال، باقی مانده ی تقسیم $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 8$ بر

$(x-2)$ را تعیین می کنیم.

$$R = P(2) = 8 + 16 - 10 - 8 \Rightarrow R = 6$$

۳. اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ و $(x-b)$ و $(x-c)$ و ... بخش پذیر

باشد، آن گاه باید $P(a) = 0$ ، $P(b) = 0$ ، $P(c) = 0$ و ...

مسئله ۲. m و n را چنان بیابید تا عبارت

$$P(x) = mx^2 + nx^2 - 4x + 12$$
 بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر باشد.

حل: روش اول:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m + 4n - 8 + 12 = 0 \\ -4m + 4n + 8 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m + 4n = -4 \\ -4m + 4n = -20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4n = -24 \Rightarrow n = -3, 4m + 4n = -4$$

$$\Rightarrow 4m - 12 = -4 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

روش دوم: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ ، در عبارت $P(x)$ به

جای هر (x^2) ، عدد ۴ را قرار می دهیم. سپس باقی مانده را

۱. عبارت $P(x)$ را بر $(x-a)$ وقتی بخش پذیر گویند که

باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ صفر باشد. اگر خارج

قسمت تقسیم $Q(x)$ باشد، می توان نوشت $P(x) = (x-a)Q(x)$

مثلاً عبارت $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ بر $(x-1)$ بخش پذیر

است. زیرا می توان نوشت:

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x-1)(x^2 - 4x + 1)$$

$$P(x) = (x-1).Q(x)$$

۲. اگر باقی مانده ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ ، R و

خارج قسمت آن $Q(x)$ باشد، می توان نوشت

$$P(x) = (x-a).Q(x) + R$$

اگر در این رابطه به جای x ، عدد a را قرار دهیم، خواهیم

داشت: $P(a) = R$.

نتیجه: اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر باشد،

آن گاه $P(a) = 0$.

مثال: نشان دهید عبارت $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ بر $(x-1)$

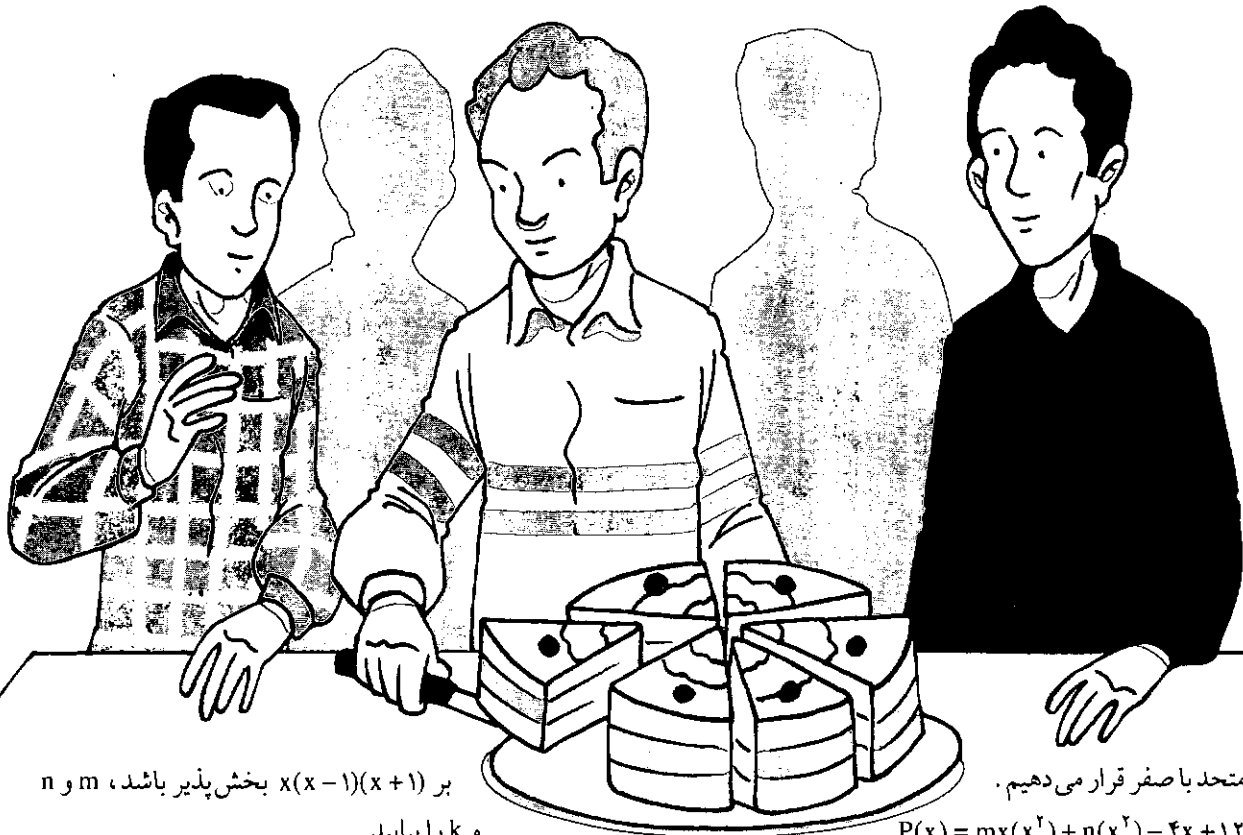
بخش پذیر است.

$$P(1) = 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

در نتیجه $P(x)$ بر $(x-1)$ بخش پذیر است.

مسئله ۱. اگر عبارت $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + m$ بر

$(x+1)$ بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر



بر $x(x-1)(x+1)$ بخش پذیر باشد، m و n و k را بیابید.

متحد با صفر قرار می دهیم.

$$P(x) = mx(x^2) + n(x^2) - 4x + 12$$

حل: روش اول:

$$R = mx(4) + n(4) - 4x + 12$$

$$R = (4m - 4)x + (4n + 12) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m - 4 = 0 \\ 4n + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

$$x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + k - 5 = 0 \\ 1 + m + n + k - 5 = 0 \\ 1 - m + n + k - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ -m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \end{cases}$$

روش دوم:

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^3 ، x قرار می دهیم. سپس باقی مانده را متحد با صفر قرار می دهیم.

$$P(x) = x(x^3) + m(x^3) + nx^2 + k - 5$$

$$R = x(x) + m(x) + nx^2 + k - 5 = x^2 + mx + nx^2 + k - 5$$

$$R = (n+1)x^2 + (m)x + (k-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 = 0 \\ m = 0 \\ k-5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

مسئله ۵. اگر عبارت $P(x) = x^{35} + 4x^{16} + ax^2 + bx + c$ بر (x^2+1) بخش پذیر باشد، a ، b و c را بیابید.

حل: در عبارت $P(x)$ ، به جای هر x^2 ، (-1) را قرار

تذکر مهم: در بعضی از مسائل، روش اول مقدور نیست. باید از روش دوم استفاده کرد.

مسئله ۳. a و b را چنان بیابید تا عبارت

$$P(x) = x^4 + ax^2 + bx^2 - 8$$

حل:

$$P(x) = x(x^2)^2 + a(x^2)^2 + bx(x^2) - 8 \text{ و } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$R = x(-1)^4 + a(-1)^2 + bx(-1) - 8 = x + a - bx - 8$$

$$R = (1-b)x + (a-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-b = 0 \Rightarrow b = 1 \\ a-8 = 0 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

توجه: ممکن است برای بعضی ها این سؤال پیش آید که آیا x^2 می تواند مساوی (-1) باشد؟ در جواب باید گفت، در ریاضی معادله $x^2 = -1$ دو ریشه ی متمایز دارد که در حوزه ی اعداد حقیقی نیست. پس تساوی $x^2 = -1$ اشکالی ندارد.

مسئله ۴. اگر عبارت $P(x) = x^4 + mx^2 + nx^2 + (k-5)$

می‌دهیم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$P(x) = x^7(x^2)^{11} + 4x(x^2)^5 + ax^7 + bx + c$$

$$R = x^7(-1)^{11} + 4x(-1)^5 + ax^7 + bx + c$$

$$= -x^7 - 4x + ax^7 + bx + c$$

$$R = (a-1)x^7 + (b-4)x + c \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 & a=1 \\ b-4=0 & b=4 \\ c=0 & c=0 \end{cases}$$

مسئله ۶. چند جمله‌ای درجه سوم بنویسید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $(x-1)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$ عدد ۴۸ باشد و این چندجمله‌ای بر $(x+1)$ بخش پذیر باشد.

حل: چندجمله‌ای درجه سوم را به صورت $P(x) = m(x-1)(x-2)(x-3) + 48$ می‌نویسیم.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ باید } P(-1)=0$$

$$p(-1) = m(-2)(-3)(-4) + 48 = 0$$

$$\Rightarrow -24m + 48 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3) + 48$$

۴. اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد A بر عدد t مساوی R_1 و

باقی مانده‌ی تقسیم عدد B بر عدد t مساوی R_2 باشد، آن گاه:

الف) باقی مانده‌ی تقسیم عدد $(A+B)$ بر عدد t برابر است با باقی مانده‌ی تقسیم $(R_1 + R_2)$ بر (t) .

ب) باقی مانده‌ی تقسیم عدد $(A \times B)$ بر عدد t برابر است با باقی مانده‌ی تقسیم $(R_1 \cdot R_2)$ بر (t) .

مسئله ۷. اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۸ مساوی ۷ و باقی مانده‌ی تقسیم عدد B بر ۸ مساوی ۶ باشد، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $(A \cdot B)$ بر ۸ را بیابید.

حل: این مسئله را بدون در نظر گرفتن قسمت «ب» از شماره ۴ درس حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} A = 8m + 7 \\ B = 8k + 6 \end{cases} \Rightarrow A \times B = (8m + 7)(8k + 6)$$

$$= 8(8km + 6m + 7k) + 42$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، باقی مانده‌ی تقسیم $(A \cdot B)$ بر عدد ۸، باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۴۲ بر ۸ است که مساوی با ۲ است. پس: $R = 2$.

آزمون

آزمون ۱. اگر $f(2) = f(-2) = 8$ ، آن گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر است؟

$$f(x) - 4 \quad (4)$$

$$f(x) - 8 \quad (3)$$

$$f(x) + 8 \quad (2)$$

$$f(x) \quad (1)$$

حل: گزینه‌ی ۳. گزینه‌ای درست است که به ازای $x = 2$ و $x = -2$ حاصل آن صفر شود.

آزمون ۲. اگر $P(x)$ بر $(x - 2\sqrt{2})$ بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $P(x^4 - 2x^2 + 2x)$ بر $(x - \sqrt{2})$ کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

حل: گزینه‌ی ۱.

$$x = \sqrt{2} \text{ و } P((\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}) = P(4 - 4 + 2\sqrt{2}) = P(2\sqrt{2}) = 0$$

آزمون ۳. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $ax^5 + bx^4 + cx + 7$ بر $(x-1)$ ، ۷ باشد، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $ax^7 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ کدام است؟

$$0 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

حل: گزینه‌ی ۴.

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx + 7 \text{ و } P(1) = 7 \Rightarrow a + b + c + 7 = 7 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$ax^7 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

پس عبارت $ax^7 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ بخش پذیر است.

آزمون ۴. اگر باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ ، 7 و بر $(x-2)$ ، 5 باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

(۱) $-2x + 9$ (۲) $2x - 9$ (۳) $-2x - 9$ (۴) $2x + 9$

حل: گزینه ی ۱.

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2; \quad a=1 \text{ و } R_1=7; \quad b=2 \text{ و } R_2=5$$

$$mx + n \text{ باشد باقی مانده } \Rightarrow \begin{cases} m(a) + n = R_1 \\ m(b) + n = R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 7 \\ 2m + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = -2, \quad n = 9$$

$$\Rightarrow mx + n = -2x + 9$$

آزمون ۵. اگر باقی مانده ی تقسیم $P(x) = x^2 - 6x^2 + 12x - 2$ بر $(x-a)$ ، 70 باشد، باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x - \frac{a}{2})$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 7

حل: گزینه ی ۴.

$$p(a) = 70 \Rightarrow a^2 - 6a^2 + 12a - 2 = 70$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a^2 + 12a - 8 = 64$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 = 64 \Rightarrow a-2 = 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\Rightarrow x - \frac{a}{2} = x - 5 \Rightarrow P(5) = 25 - 150 + 60 - 2 = -77$$

آزمون ۶. اگر $2f(x) + f(-x) = x^2 - 3x$ ، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)$ کدام است؟

(۱) 18 (۲) -18 (۳) -5 (۴) -6

حل: گزینه ی ۲.

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x \Rightarrow \begin{cases} 2f(-x) + f(x) = -x^2 + 3x \\ 2f(x) + f(-x) = x^2 - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(x) = -3x^2 + 9x \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x$$

$$f(3) = 27 - 9 = 18$$

آزمون ۷. اگر $f(\frac{1}{x-1}) = \frac{4x-3}{x-1}$ ، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-\sqrt{2})$ کدام است؟

(۱) $(2+\sqrt{2})$ (۲) $(3+\sqrt{2})$ (۳) $(4+\sqrt{2})$ (۴) $(5+\sqrt{2})$

حل: گزینه ی ۳.

$$f(\frac{1}{x-1}) = \frac{4(x-1)+1}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$f(x) = 4 + x \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$$

آزمون ۸. باقی مانده ی تقسیم x^7 بر $(x^2 - x + 1)$ کدام است؟

(۱) x (۲) $2x$ (۳) $-2x$ (۴) $3x$

حل: گزینه ی ۱.

$$P(x) = x^9 = x(x^8) = x(x^8 - 1 + 1) = x(x^8 - 1) + x = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) + x$$

$$P(x) = x \underbrace{(x^4 - 1)(x + 1)(x^4 - x + 1)}_{\text{بر } (x^4 - x + 1) \text{ بخش پذیر است}} + x \Rightarrow R = x$$

آزمون ۹. باقی مانده ی تقسیم $x^{111} + x^{21} - 2$ بر $(x^2 - x)$ کدام است؟

۲x + ۲ (۴)

۲x - ۲ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۱)

حل: گزینه ی ۳.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x, \quad P(x) = x^{111} + x^{21} - 2$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^2 ، x قرار دهیم، به این ترتیب، هر x^n ، $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$ در نهایت به x تبدیل می شود. درباره ی x^9 این عمل را انجام می دهیم.

$$x^9 = x(x^2)^4 \rightarrow x(x)^4 = x(x^2)^2 \rightarrow x(x)^2 = x(x^2)$$

$$\rightarrow x(x) = x^2 \rightarrow x$$

پس درباره ی $P(x)$ ، $x^{111} \rightarrow x$ و $x^{21} \rightarrow x$ بنابراین: $R = 2x - 2$.

آزمون ۱۰. اگر $f(x+4) = x^2 - 4x$ ، آنگاه باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۵ (۱)

حل: گزینه ی ۴، باید $f(1)$ را پیدا کرد، بنابراین با فرض $x = -3$ ، مقدار $f(x+4)$ را به دست می آوریم:

$$f(-3+4) = 9 + 12 \Rightarrow f(1) = 21$$

یکی چیست؟

تفریح اندیشه

از: التفهیم، ابوریحان بیرونی،

به تصحیح جلال الدین همایی

آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیت های ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانده ی او گرد آید به جمله شدن و میان آن پاره ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن پاره ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانه ی معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشترند هر گاه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزاید. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزای او که از او کمترند هرگاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان بر حال خویش است.

