

بخش پذیری در چند جمله ایها

(مورد استفاده دانش آموزان سال سوم ریاضی)

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

حل: در صورتی که درجه مقسوم را به n و درجه مقسوم علیه را به m نشان دهیم درجه خارج قسمت برابر $n - m$ و درجه باقی مانده برابر $m - 1$ می شود. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - 1 = 4 \Rightarrow m = 5 \\ n - m = 7 \Rightarrow n = m + 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$n = 5 + 7 = 12, \quad n = 12 \quad \text{درجه مقسوم}$$

(۱) بخش پذیری چند جمله ای $p(x)$ بر $x - a$:

بنابر آنچه در قبل گفته شده در صورتی که خارج قسمت $p(x)$ بر $(x - a)$ را به $q(x)$ نمایش داده و باقی مانده آن را به R نمایش دهیم در این صورت خواهیم داشت: $p(x) = (x - a)q(x) + R$ در این رابطه R یک عدد حقیقی است (زیرا درجه مقسوم علیه برابر یک است). رابطه اخیر به ازای هر x حقیقی برقرار است. بنابراین با اختیار $x = a$ داریم: $p(a) = (a - a)q(a) + R$ و نتیجه می شود: $R = p(a)$ یعنی باقی مانده $p(x)$ بر $(x - a)$ برابر است با: $p(a)$. بنابراین برای تعیین باقی مانده چند جمله ای مفروض $p(x)$ بر $(x - a)$ کافی است $p(a)$ را پیدا کنیم. بنابراین اگر $p(a) = 0$ آنگاه $p(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

مثال ۲: باقی مانده $1 - x^2 + 3x^5 - x^7$ بر $x + 1$

بخش پذیری:

هرگاه باقی مانده چند جمله ای: $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ بر چند جمله ای: $g_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ خارج قسمت این تقسیم را به $q_{n-m}(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$p_n(x) = g_m(x)q_{n-m}(x) + R_{m-1}(x)$ لازم به توضیح است که اندیسهای فوق نشان دهنده درجه چند جمله ای است یعنی اندیس n و m و $n - m$ و $m - 1$ به ترتیب نشان دهنده درجه چند جمله ای $p(x)$ و $g(x)$ و $q(x)$ و $R(x)$ می باشد. برای توضیح اندیسهای منتخب خارج قسمت و باقی مانده می توان گفت که بزرگترین جمله توان دار در خارج قسمت تقسیم $p_n(x)$ بر $g_m(x)$ عبارت است از: $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ یا به عبارت ساده تر: $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ که در واقع این جمله درجه خارج قسمت را تعیین می کند. به همین علت درجه $q(x)$ برابر $n - m$ است. و همچنین درجه انتخاب شده برای باقی مانده به این علت است که تقسیم مقسوم بر مقسوم علیه وقتی خاتمه می یابد که درجه باقی مانده حداقل یک درجه از درجه مقسوم علیه کمتر باشد. به همین علت درجه باقی مانده معمولاً $m - 1$ است در صورتی که درجه مقسوم علیه برابر m باشد.

مثال ۱: در یک تقسیم در صورتی که درجه باقی مانده ۴ و درجه خارج قسمت ۷ باشد درجه مقسوم چیست؟

(۲) تعیین خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$:

چند جمله‌ای: $p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$ را در نظر می‌گیریم، خارج قسمت این چند جمله‌ای بر $x-a$ یک چند جمله‌ای است از درجه $n-1$ ، که فرض می‌کنیم این چند جمله‌ای به صورت: $g(x) = B_{n-1} x^{n-1} + B_{n-2} x^{n-2} + \dots + B_0$ باشد. در اینجا می‌خواهیم روشی را ارائه دهیم که بدون عمل تقسیم بتوان ضرایب $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ را پیدا کنیم و در نتیجه می‌توانستیم خارج قسمت تقسیم را مشخص کنیم. همانطور که از قضیه تقسیم نتیجه می‌شود در اینجا باید داشته باشیم

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_0 = (x-a)(B_{n-1} x^{n-1} + B_{n-2} x^{n-2} + \dots + B_0) + R$$

که R باقی مانده است. پس از ضرب و مرتب کردن طرف دوم داریم:

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0 = B_{n-1} x^n + (B_{n-2} - a B_{n-1}) x^{n-1} + (B_{n-3} - a B_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (B_0 - a B_1) x + R$$

از تساوی ضرایب جمله‌های هم درجه خواهیم داشت:

$$A_n = B_{n-1}, \quad A_{n-1} = B_{n-2} - a B_{n-1}, \quad \dots, \quad A_k = B_{k-1} - a B_{k-2}, \quad \dots, \quad A_0 = B_0 - a B_1$$

و یا:

$$A_n = B_{n-1}, \quad B_1 = A_1 + a B_0, \quad \dots, \quad B_k = A_k + a B_{k-1}, \quad \dots, \quad R = A_n + a B_{n-1}$$

بنابراین در اینجا به طور زنجیروار ضرایب خارج قسمت را بدون تقسیم می‌توان به دست آورد.

مثال ۵: خارج قسمت تقسیم $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$ بر $x-2$ را به دست آورید (بدون استفاده از تقسیم).

حل: خارج قسمت تقسیم از درجه ۴ است و می‌توان آن را چنین فرض کرد:

$$q(x) = B_4 x^4 + B_3 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0$$

حل: می‌دانیم $R = p(a)$ بنابراین داریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow a=-1$$

$$R = p(-1) = (-1)^5 - 3(-1)^3 + 2(-1) + 1 =$$

باقی مانده:

$$-1 + 3 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow R = 2$$

مثال ۳: s و k را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای،

$p(x) = x^5 + kx^3 + sx^2 + 3$ بر $x-1$ بخش پذیر و باقی مانده آن بر $x+1$ برابر -4 باشد.

حل: چون باید $p(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد بنابراین باید باقی مانده $p(x)$ بر $(x-1)$ برابر صفر و یا $p(1) = 0$ باشد. و چون باقی مانده $p(x)$ بر $x+1$ برابر -4 شده است بنابراین $p(-1) = -4$ است. و در نتیجه از دستگاه مقابل s و k محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1) = 1 + k + s + 3 = 0 \\ p(-1) = -1 - k + s + 3 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s + k = -4 \\ s - k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

بنابراین چند جمله‌ای مفروض چنین است:

$$p(x) = x^5 + x^3 - 5x^2 + 3$$

مثال ۴: در چند جمله‌ای: $p(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + 4x + 1$ مقدار a را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد.

حل: برای اینکه $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد باید داشته باشیم:

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a$$

$$p(-a) = R \Rightarrow R = 0 \Rightarrow p(-a) = 0$$

$$p(-a) = (-a)^4 + a(-a)^3 + 3(-a)^2 + 4(-a) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

و در نتیجه از قاعده زنجیره‌ای داریم: $a=2$.

$$B_1=A_1=1, B_1=A_1+aB_0=0+2 \times 1=2, B_2=A_2+aB_1=-2+2 \times 2=2$$

$$B_2=A_2+aB_1=0+2 \times 2=4, B_3=A_3+aB_2=0+2 \times 4=8$$

باقی مانده:

$$2+2 \times 2=6, R=A_0+aB_0=1+2 \times 6=13 \Rightarrow R=13$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم چنین است:

$$q(x)=x^2+2x^2+x^2+2x+6$$

مثال ۶: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b را در صورتی که داشته باشیم: $p(x)=ax^{n+1}+bx^{n+1}+c$ به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم ابتدا $p(x)$ را بر حسب قوای x^n منظم می‌کنیم. و سپس $x^n = -\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم که در این صورت باقی مانده تقسیم به دست می‌آید و داریم:

$$(ax^n+b=0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a}) p(x) = a(x^n)^2 x^1 + b(x^n)^1 x + c$$

$$R(x) = a(-\frac{b}{a})^2 x^1 + b(-\frac{b}{a})^1 x + c$$

و یاپس از اختصار لازم داریم:

$$R(x) = -\frac{b^2}{a^2} x^1 + b(-\frac{b}{a}) x + c$$

۳) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b :

به‌طور کلی برای تعیین باقی مانده $p(x)$ بر ax^n+b ابتدا $p(x)$ را بر حسب قوای x^n منظم می‌کنیم و سپس $x^n = -\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم و باقی مانده به دست می‌آید.

مثال ۷: باقی مانده $P(x)=x^4-2x^3+3x^2-x-1$ بر x^2+1 پیدا کنید.

حل: $P(x)$ را بر حسب قوای x^2 منظم می‌کنیم بنابراین داریم

$$P(x)=(x^2)^2-2(x^2)^1+3(x^2)x^0-x^2+x-1$$

$$x^2=-1$$

$$R(x)=(-1)^2-2(-1)^1+3(-1)x^1-(-1)+x-1$$

$$R(x)=-3x^1+x-3$$

پس از اختصار لازم داریم:

۴) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^2+bx+c :

روش اول: برای تعیین باقی مانده $p(x)$ بر ax^2+bx+c ابتدا $p(x)$ را بر حسب قوای x^2 مرتب کرده و سپس $x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ قرار می‌دهیم که در این صورت عبارت حاصله باقی مانده تقسیم است.

مثال ۸: اگر عبارت $p(x)=x^2+1$ بر x^2-mx+n بخش پذیر باشد، m و n را حساب کنید.

حل: ابتدا باقی مانده $p(x)$ را بر x^2-mx+n پیدا می‌کنیم و سپس آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم یعنی m و n را طوری تعیین می‌کنیم که باقی مانده بازاء جمع مقادیر متغیر x برابر صفر باشد، در این صورت داریم: $R(x) \equiv 0$ که ضرایب کلیه درجات متغیر برابر صفر خواهد بود. بنابراین داریم:

$$x^2-mx+n=0 \Rightarrow x^2=mx-n$$

$$x^2=mx-n \Rightarrow R(x)=(mx-n)^2+1=$$

$$m^2x^2-2mnx+n^2+1$$

$$R(x)=m^2(mx-n)-2mnx+n^2+1=(m^2-2mn)$$

$$x-m^2n+n^2+1 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-2mn=0 \Rightarrow m(m-2n)=0 \\ n^2-m^2n+1=0 \end{cases} \begin{cases} m=0 \\ m^2=2n \end{cases}$$

به ازای $m=0$ در معادله دوم دستگاه جواب حقیقی نداریم.

ولی به ازای $m^2=2n$ معادله دوم دستگاه چنین می‌شود:

$$n^2-2n^2+1=0$$

داریم: $n^2=1 \Rightarrow n=\pm 1$ به ازای $n=-1$ مقدار m غیر حقیقی

است. و به ازای $n=1$ دو مقدار برای m به دست می‌آید و داریم:

$$m^2=2 \Rightarrow m=\pm \sqrt{2}$$

و در نتیجه اگر $n=1$ آنگاه

$$q_r(x)(ax^2+bx+c)+R(x) \quad (1)$$

در اینجا کافی است $R(x)$ را تعیین کنیم. بنابراین حاصل ضرب $A(x)$ و $B(x)$ را به دست می آوریم و از آنجا با مقایسه می توان $R(x)$ را به دست آورد. یعنی:

$$A(x)B(x) = [q_1(x)(ax^2+bx+c) + kx + s] \\ [q_r(x)(ax^2+bx+c) + mx + n]$$

$$A(x)B(x) = q_1(x)q_r(x)(ax^2+bx+c)^2 + [(mx+s)q_1(x) \\ + (kx+s)q_r(x)](ax^2+bx+c) + (kx+s)(mx+n) \\ A(x)B(x) =$$

$$\underbrace{[q_1(x)q_r(x)(ax^2+bx+c) + (mx+s)q_1(x) + (kx+s)q_r(x)]}_{q_r(x)}$$

$$x(ax^2+bx+c) + (kx+s)(mx+n) \quad (2)$$

بنابراین در اینجا با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A(x)B(x) = q_r(x)(ax^2+bx+c) + \underbrace{(kx+s)(mx+n)}_{R(x)}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R(x) = (kx+s)(mx+n)$$

از آنجا که باقی مانده هر تقسیم حداقل یک درجه از درجه مقسوم علیه کمتر است بنابراین باقی مانده $A(x)B(x)$ از تقسیم نهایی بر $A(x)B(x)$ به دست می آید و در نتیجه باقی مانده $A(x)B(x)$ بر $R(x) = (kx+s)(mx+n)$ برابر ax^2+bx+c می باشد. در اینجا برای روشن شدن مطلب یک مثال عددی حل می کنیم. مثلاً اگر باقی مانده $A(x)$ و $B(x)$ بر x^2-3x+2 به ترتیب $x+2$ و $x-2$ باشد باقی مانده $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 را پیدا کنید.

حل: برای به دست آوردن باقی مانده $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 کافی است باقی مانده x^2-3x+2 را بر x^2-3x+2 پیدا کنیم. بنابراین داریم: $x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x-2 \Rightarrow R(x) = (3x-2)-4 = 3x-6$

$m = \pm\sqrt{2}$ و بنابراین جواب مسئله $n=1$ و $m=\sqrt{2}$ یا $n=1$ و $m=-\sqrt{2}$ است.

روش دوم: برای تعیین باقی مانده $p(x)$ بر ax^2+bx+c اگر معادله $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد می توان به روش دیگر نیز آن را محاسبه کرد. اگر α و β دو ریشه آن باشند، خواهیم داشت: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. در این صورت طبق رابطه بخش پذیری داریم:

$$p(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)q(x) + kx + s$$

کنه در این رابطه $R=kx+s$ باقی مانده تقسیم است. حال طبق قانون بخش پذیری داریم:

$$p(\beta) = k\beta + s \text{ و } p(\alpha) = k\alpha + s$$

یعنی k و s از دستگاه زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} k\alpha + s = p(\alpha) \\ k\beta + s = p(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{p(\alpha) - p(\beta)}{\alpha - \beta} \\ s = \frac{\alpha p(\beta) - \beta p(\alpha)}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

می دانیم $p(\alpha)$ و $p(\beta)$ به ترتیب باقی مانده های $p(x)$ بر $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ می باشند و در نتیجه داریم:

$$p(\alpha) = R_1, \quad p(\beta) = R_2$$

مثال ۹: اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $p(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب برابر ۲ و -۴ باشد باقی مانده $p(x)$ را بر x^2-1 پیدا کنید.

حل: چون داریم: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ و $p(1) = -4$ و $p(-1) = 2$ بنابراین داریم:

$$k+s = -4 \quad (R'(x) = kx+s)$$

$$k(-1) + s = p(-1), \quad k+s = p(1)$$

و در نتیجه دستگاه مقابل حاصل می شود:

$$-k+s=2 \Rightarrow k=-3, s=-1 \Rightarrow R(x) = -3x-1$$

مثال ۱۰: نشان دهید هرگاه باقی مانده چند جمله ای های $A(x)$ و $B(x)$ بر ax^2+bx+c به ترتیب برابر $kx+s$ و $mx+n$ باشند برای تعیین باقی مانده $A(x)B(x)$ بر ax^2+bx+c کافی است باقی مانده $(kx+s)(mx+n)$ را بر ax^2+bx+c پیدا کنیم.

حل: بنابر قانون بخش پذیری داریم:

$$\begin{cases} A(x) = q_1(x)(ax^2+bx+c) + kx + s \\ B(x) = q_r(x)(ax^2+bx+c) + mx + n, \quad A(x)B(x) = \end{cases}$$

و در نتیجه باقی مانده $A(x)B(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $3x - 6$ می باشد.

مثال ۱۱: نشان دهید در صورتی که $p(x)$ بر $x^{n+1} - 1$ بخش پذیر باشد بر $g(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ نیز بخش پذیر است.

حل: کافی است به اتحاد:

$(x^{n+1} - 1) = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$ توجه کنیم. زیرا اگر $p(x)$ بر $x^{n+1} - 1$ و یا $(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$ بخش پذیر باشد بر هر یک از عامل های مقسوم یعنی $x - 1$ و $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ نیز بخش پذیر است. به عنوان مثال اگر عبارتی بر $x^5 + 1$ بخش پذیر باشد بر عامل های آن (عامل های مقسوم علیه) یعنی $x + 1$ و $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ نیز بخش پذیر است. زیرا داریم: $(x^5 + 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ بنابراین در اینجا نتیجه می شود که اگر عبارتی بر عبارت دیگر بخش پذیر باشد بر عامل های آن عبارت نیز بخش پذیر است.

مثال ۱۲: اگر p, q, r, s و t اعداد طبیعی باشند ثابت کنید،

$$A(x) = x^{14p+1} - x^{14q+5} + x^{14r+4} - x^{14s+3} + x^{14t+2} - x^{14s+1} + x^{14t}$$

$$x^{14} - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

بخش پذیر است.

حل: در این مسئله کافی است ثابت کنیم $A(x)$ بر $x^7 + 1$ بخش پذیر است. بنابراین $A(x)$ را بر حسب توان هایی از 7 منظم می کنیم و با در نظر داشتن $x^7 + 1 = 0$ به جای x^7 مقدار -1 را قرار می دهیم. یعنی:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^7)^p - (x^7)^q + (x^7)^r - (x^7)^s + (x^7)^t \\ &= (-1)^p - (-1)^q + (-1)^r - (-1)^s + (-1)^t \\ R(x) &= (-1)^p x^1 - (-1)^q x^5 + (-1)^r x^4 - (-1)^s x^3 \\ &+ (-1)^t x^2 - (-1)^t x + (-1)^t = x^1 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $A(x)$ بر عبارت مفروض بخش پذیر است. زیرا باقی مانده تقسیم $R(x)$ بر $x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ برابر صفر است.

۵) بخش پذیری $p(x)$ بر $(x-a)^n$:

اگر $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد آنگاه،
 $p(x) = (x-a)^n q(x)$ و بنابراین با مشتق گیری مکرر تا $(n-1)$ مرتبه از این رابطه خواهیم دید که عامل $(x-a)$ باز هم موجود خواهد بود و در نتیجه با قرار دادن $x=a$ داریم $p^{(n-1)}(a) = 0$.
یعنی اگر از $p(x)$ به طور مکرر $(n-1)$ مرتبه مشتق بگیریم عبارت حاصل که $p^{(n-1)}(x)$ می باشد باز هم بر $x-a$ بخش پذیر است، به عبارت دیگر چون، $p^{(n-1)}(a) = 0$ بنابراین باقی مانده تقسیم $p^{(n-1)}(x)$ بر $x-a$ صفر است و در نتیجه $p^{(n-1)}(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است. و در اینجا از نتیجه فوق می توان قضیه زیر را استخراج کرد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله ای $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد آن است که $p(x)$ و همه مشتقات متوالی آن تا مرتبه $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش پذیر باشند. یعنی داشته باشیم:

$$p(a) = p'(a) = p''(a) = \dots = p^{(n-1)}(a) = 0$$

مثال ۱۳: به ازای چه مقادیری از a و b و c عبارت درجه چهارم $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر است.
حل: شرط این که $p(x)$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر باشد این است که $p(x)$ و $p'(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر باشند. با دوبار مشتق گیری داریم:

$$p'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c, \quad p''(x) = 12x^2 + 6a$$

چون $p(x)$ و $p'(x)$ و $p''(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیرند بنابراین داریم:

$$x = -1, \quad x+1 = 0.$$

$$\Rightarrow p(-1) = (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1) + c = 0.$$

$$\Rightarrow p(-1) = 1 + a - b + c = 0. \quad (1)$$

$$p'(-1) = 4(-1)^3 + 3a(-1) + 2b + c = 0.$$

$$\Rightarrow p'(-1) = -4 - 3a + 2b + c = 0. \quad (2)$$

$$p''(-1) = 12(-1)^2 + 6a = 0 \Rightarrow 12 + 6a = 0 \Rightarrow$$

$$a = -2 \quad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر a و b و c به دست می آیند یعنی داریم:

$$a = -6; -4 - 2a + b = 0 \Rightarrow$$

$$-4 - 2(-6) + b = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$a = -6, b = -8; 1 + a - b + c = 0 \Rightarrow 1 - 6 - (-8) + c$$

$$= 0 \Rightarrow c = -3$$

و بنابراین $p(x)$ مشخص می شود یعنی:

$$p(x) = x^2 - 6x^2 - 8x - 3$$

مثال ۱۴: در چند جمله ای: $p(x) = x^2 + px + qx + R$ مقادیر p و q و R را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x-1)^2$ و $x+2$ بخش پذیر باشد.

حل: فرض می کنیم که $p(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است بنابراین $p'(x)$ نیز بر $(x-1)$ بخش پذیر است و داریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad (1)$$

$$p(1) = (1)^2 + p(1) + q(1) + R = 0,$$

$$p'(x) = 2x + p + q \Rightarrow p'(1) =$$

$$2(1) + p(1) + q = 0 \quad (2)$$

از طرفی دیگر $p(x)$ بر $x+2$ نیز باید بخش پذیر باشد بنابراین داریم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$p(-2) = (-2)^2 + p(-2) + q(-2) + R = 0 \quad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) دستگاه سه معادله و سه مجهول تشکیل می شود که از حل این دستگاه پارامترهای مطلوب محاسبه می شوند یعنی:

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} p+q+R=-1 \\ 2p+q=-2 \\ 4p-2q+R=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=-2 \\ R=1 \end{cases}$$

و در نتیجه $p(x)$ مشخص می شود یعنی:

$$p(x) = x^2 - 2x + 1$$

۶) بخش پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$:

در اینجا لازم است چهار حالت را مورد بررسی قرار دهیم و شرط بخش پذیری را برای هر یک از حالات چهارگونه به دست آوریم.

(۱) $p(x) = x^n + a^n$ بر $x-a$ هرگز بخش پذیر نیست زیرا داریم:

$$R = p(a) = 2a^n$$

(۲) $p(x) = x^n + a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش پذیر است که n فرد باشد. زیرا داریم:

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a: R = p(-a) = (-a)^n + a^n = 0 \Rightarrow$$

$$n = 2k-1:$$

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

(۳) $p(x) = x^n - a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش پذیر است که n زوج باشد. زیرا داریم:

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a: R = p(-a) = (-a)^n - a^n = 0$$

$$n = 2k: x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

$$(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

(۴) $p(x) = x^n - a^n$ بر $x-a$ همواره بخش پذیر است. زیرا داریم:

$$x-a=0 \Rightarrow x=a: R = p(a) = a^n - a^n = 0$$

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

مثال ۱۵: آیا عبارت $x^{15} + y^{45}$ بر $x+y^3$ بخش پذیر است؟

حل: بله، زیرا داریم:

$$x+y^3=0 \Rightarrow x=-y^3: R = (-y^3)^{15} + y^{45} = -y^{45} + y^{45} = 0$$

مثال ۱۶: آیا عبارت $x^6 - 16$ بر $x+2$ و $x-2$ بخش پذیر است؟

است؟

حل: بله، زیرا داریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2, x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$: R = (\pm 2)^6 - 16 = 16 - 16 = 0$$



مثال ۱۷: آیا عبارت $x^7 + y^{14}$ بر $x - y^2$ بخش پذیر است؟

حل : خیر، زیرا داریم:

$$x - y^r = 0 \Rightarrow x = y^r:$$

$$R = (\dot{y}^r)^r + y^{1r} = y^{1r} + y^{1r} = 2y^{1r}$$

$$\begin{cases} t = \text{فرد} & \text{عامل } x^k + a^k \text{ بر } (x^k)^t + (a^k)^t \\ t = \text{زوج} & \text{عامل } x^k + a^k \text{ بر } (x^k)^t - (a^k)^t \end{cases}$$

به عنوان مثال $x^4 - 1$ بر $x^3 + 1$ و $x^2 + 1$ و $x + 1$ و $x^2 + 1$ بخش پذیر است، زیرا داریم:

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = 12 \text{ و } \frac{x^4 - 1}{x + 1} = 16 \text{ و } \frac{x^4 - 1}{x} = 24$$

و

$$\frac{x^4 - 1}{x} = 8$$

۴) $p(x) = x^n - a^k$ بر $x^k - a^k$ وقتی بخش پذیر است که n بر k قابل قسمت باشد یعنی داشته باشیم: $n = kt$ زیرا اگر n را بر k تقسیم کنیم داریم، $n = kt + r$ و در نتیجه خواهیم داشت:

دھیم $x^k = a^k$ باقی ماندہ تقسیم چنین است:

$$R = (a^k)^t x^r - a^{kt+r} = a^{kt} (x^r - a^r)$$

برای آنکه باقی ماندهٔ صفر شود باید داشته باشیم: $x^r - a^r = 0$ که چون $x \neq a$ لذا $r = 0$ و در نتیجه به دست می آید: $n = kt$.
به عنوان مثال $p(x) = x^{5^2} - y^{5^2}$ بر $x^4 - y^4$ بخش پذیر است زیرا داریم:

$$x^4 - y^4 = 0 \Rightarrow x^4 = y^4 : R(x) = (y^4)^r - y^{5^2} = y^{5^2} - y^{5^2} = 0$$

مثال ۱۸: آیا عبارت $p(x) = 64A^{12}B^{18} - C^4D^{24}$ بر $8A^4B^6 - C^2D^{12}$ بخش پذیر است؟

حل : ابتدا $p(x)$ را بر حسب توانی از ۶ منظم می‌کنیم یعنی:

$$p(x) = (2A^3B^2)^1 - (CD^2)^1$$

توانی از ۳ منظم می‌کنیم یعنی:

$$\wedge A^r B^s - C^r D^{s^r} = (\vee A^r B^r)^r - (CD^r)^r$$

بافرض $x = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ و $y = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ و مقسوم علیه چنین می شوند:

$$p(x) = x^1 - y^1, (\forall A^r B^r)^r - (C D^r)^r = x^r - y^r$$

چون $\frac{n}{k} = \frac{1}{2} = 2$ عددی است صحیح بنابراین n بر k بخش پذیر است و در نتیجه $p(x) = x^r - y^r$ بخش پذیر است و داریم:

$$\frac{p(x)}{x^r - y^r} = \frac{x^1 - y^1}{x^2 - y^2} = x + y$$

بنابراین باقی مانده تقسیم

صفر و خارج قسمت آن چنین است:

$$q(x) = x^r + y^r = \wedge A^r B^r + C^r D^r$$

۷: بخش پذیری $p(x) = x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$

(بافرض: $n, k \in \mathbb{N}$ و $a > 0$):

در این جا نیز چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و مورد بررسی قرار می‌دهیم:

(۱) $p(x) = x^n + a^n$ بر $x^k - a^k$ بخش پذیر نیست. زیرا داریم:

$$x^k - a^k = 0 \Rightarrow x^k = a^k \Rightarrow \begin{cases} k \text{ زوج} : x = \pm a \\ k \text{ فرد} : x = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$R = (\pm a)^n + a^n \Rightarrow \begin{cases} n \text{ زوج} : R = 2a^n \\ n \text{ فرد} : R = 2a^n \text{ و } R = 0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار n و k ، $p(x)$ بر $x^k - a^k$ بخش پذیر نیست. بدیهی است که در حالت k زوج و n فرد $p(x)$ باید بر $x - a$ و $x + a$ بخش پذیر باشد که می‌دانیم $p(x) = x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر نیست.

عددی فرد باشد. به عنوان مثال عبارت $x^{48} + 1$ بر $x^{11} + 1$ بخش پذیر است زیرا داریم: $\frac{48}{11} = 3$ و بنابراین داریم: $x^{48} + 1 = (x^{11})^4 + 1$ و $x^{11} = -1$ در نتیجه،
 $R = (-1)^4 + 1 = 0$

باشد، یعنی: $\frac{n}{k} = \tau t$. زیرا داریم:

یافرض

$$n = r_{kt} : p(x) = x^{r_{kt}} - a^{r_{kt}} = (x^{k_t} - a^{k_t})(x^{k_t} + a^{k_t})$$

$$p(x) = [(x^k)^t - (a^k)^t] [(x^k)^t + (a^k)^t] \Rightarrow$$

مسائل بخش پذیری:



(۸) نشان دهید اگر باقی مانده تقسیم $A(x)$ بر $g(x)$ برابر R_1 و باقی مانده تقسیم $B(x)$ بر $g(x)$ برابر R_2 باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $A(x)B(x)$ بر $g(x)$ برابر با باقی مانده تقسیم $R_1 R_2$ بر $g(x)$ است.

(۹) اگر باقی مانده $A(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $x - 1$ و باقی مانده تقسیم $B(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $x + 2$ باشد، باقی مانده تقسیم $A(x)B(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را تعیین کنید.

(۱۰) باقی مانده تقسیم $x^{5n+3 \cdot k+1}$ بر $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ به دست آورید.

(۱۱) اگر A و B و C اعداد طبیعی باشند، ثابت کنید عبارت:
 $A(x) = x^{12A+1} + x^{20B+2} + x^{40C+3} + 1$
 بخش پذیر است.

(۱۲) در تقسیم $p(x) = x^5 + kx^3 + sx^2 + t$ مقادیر k و s و t را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+1)^3$ بخش پذیر باشد.

(۱۳) آیا عبارت $x^{135} + y^{135} + x^{30} + y^9$ بر $x^2 + y^9$ بخش پذیر است؟

(۱۴) در عبارت $A(x) = x^{77} + y^{7n}$ مقدار n را چنان تعیین کنید که عبارت $A(x)$ بر $x^{11} + y^5$ بخش پذیر باشد.

(۱۵) عبارت $x^{91n} + k^{2n}$ به ازای چه مقادیری از k و n بر عبارت $x^{32} + k$ بخش پذیر است.

(۱) در یک تقسیم در صورتی که درجه خارج قسمت ۵ و درجه باقی مانده ۳ باشد درجه مقسوم چیست؟

(۲) در چند جمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + c$ و a و c و b را طوری تعیین کنید که $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر -3 شود.

(۳) خارج قسمت و باقی مانده تقسیم $p(x) = x^5 - 3x + 1$ را بر $x - 1$ بدون عمل تقسیم به دست آورید.

(۴) باقی مانده تقسیم $p(x) = x^{45} - 3x^{20} + 2x^{15} - x^5 + 1$ بر $x^5 + 1$ را حساب کنید.

(۵) اگر عبارت $p(x) = x^8 + 16$ بر $x^4 - mx^2 + n$ بخش پذیر باشد m و n را حساب کنید.

(۶) باقی مانده تقسیم $p(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 1$ را بر $x^2 + x - 2$ به دست آورید.

(۷) اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $A(x)$ بر $x + 2$ و $x - 1$ به ترتیب برابر 2 و 1 باشد باقی مانده تقسیم $A(x)$ بر $x^2 + x - 2$ را به دست آورید.

تفریح اندیشه

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)

کمد پیراهنهای تیمور دارای ۱۷ پیراهن آبی، ۱۱ زرد، ۹ نارنجی، ۲۴ سبز، و ۲ بنفش است که مطابق رنگهایشان قرار نگرفته‌اند.

برق رفته و تیمور نمی‌تواند رنگهای پیراهنها را تشخیص دهد. در این صورت تیمور چند پیراهن باید بردارد تا مطمئن شود که حداقل دو پیراهن از یک رنگ را برداشته است؟

جواب: پنج رنگ موجود است. پنج پیراهن اول ممکن است همه به رنگهای مختلف باشند، در حالی که شش پیراهن اول نمی‌توانند.

