

بحث پیرامون مقاطع مخروطی ۱

همان کنومرثی

دبیر ریاضی اساتذات چهارمعال و بفتناری

ابتدا ثابت می کنیم که شکل کلی معادله یک مقطع مخروطی به صورت زیر است:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

برهان: فرض می کنیم $F(\alpha, \beta)$ کانون و خط (D) به معادله $ax + by + c = 0$ خط هادی و نقطه $M(x, y)$ نقطه دلخواهی از یک مقطع مخروطی باشند.

طبق تعریف، در یک مقطع مخروطی می توان نوشت:

$$\frac{MF}{MH} = e \quad (1)$$

e خروج از مرکز مقطع مخروطی است:

$$MH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad MF = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

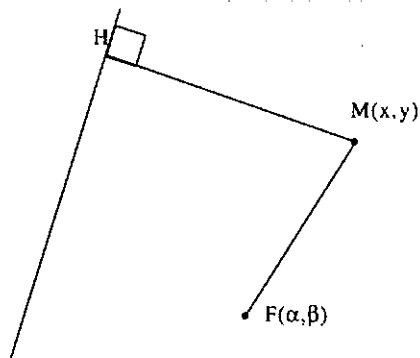
اکنون به جای MH و MF در (۱) مقدارگذاری می کنیم.

در نتیجه داریم:

$$\frac{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e \Rightarrow$$

$$\frac{(a^2 + b^2)[x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2]}{c^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy} = e^2$$

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)\alpha x + \alpha^2(a^2 + b^2) + \\ & (a^2 + b^2)y^2 - 2\beta(a^2 + b^2)y + \beta^2(a^2 + b^2) = \\ & a^2e^2x^2 + b^2e^2y^2 + 2abe^2xy + 2ace^2x + 2bce^2y + e^2c^2 \\ & \Rightarrow \underbrace{(a^2e^2 - a^2 - b^2)}_A x^2 + \underbrace{2abe^2}_{B} xy + \underbrace{(b^2e^2 - a^2 - b^2)}_C y^2 + \\ & \underbrace{2(ace^2 - \alpha a^2 - \alpha b^2)}_D x + \underbrace{2(bce^2 - \beta a^2 - \beta b^2)}_E y - \\ & \underbrace{(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)}_F = 0 \end{aligned}$$



در نتیجه خواهیم داشت:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

حال فرض می کنیم، مقطع مخروطی در حالت کلی مرکزدار و تجزیه نشده باشد. بنابراین برای پیدا کردن مختصات مرکز و باشرایطی که به پیدا کردن مختصات مرکز منجر می شود، معادله کلی مقطع مخروطی را همگن می کنیم، یعنی:

$$x \rightarrow \frac{x}{z}, y \rightarrow \frac{y}{z}$$

در این صورت:

$$\frac{Ax^2}{z^2} + \frac{2Bxy}{z^2} + \frac{cy^2}{z^2} + \frac{2Dx}{z} + \frac{2Ey}{z} + F = 0$$

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

اینک به کمک مشتق، مختصات مرکز مقطع مخروطی را

به دست می آوریم:

۶۲

برای دانش آموزان دوره متوسطه

۲. اگر $\delta < 0$ باشد، معادله (۳) ریشه ندارد و بنابراین مقداری برای m به دست نمی آید. یعنی مقطع مجانب ندارد. پس مقطع بیضی است و اگر $A=C$ و $B=0$ باشند، مقطع دایره است.

۳. اگر $\delta = 0$ باشد، منحنی یک امتداد مجانب دارد و در نتیجه مقطع سهمی است. پس با توجه به نکات گفته شده، چکیده مطالب به صورت زیر است:

در مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ که $\delta = B^2 - AC$ داریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0$$

۱. اگر $\delta > 0$ ، آن گاه مقطع مرکزدار تجزیه نشده از نوع هذلولی اگر $A+C=0$ باشد، هذلولی متساوی الساقین است.

۲. اگر $\delta < 0$ ، آن گاه مقطع مرکزدار تجزیه نشده از نوع بیضی اگر $A=C$ و $B=0$ باشد، هذلولی دایره است.

۳. اگر $\delta = 0$ ، آن گاه مقطع سهمی است.

حال اگر $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$ باشد، بحث را به صورت

زیر پی می گیریم:

$$\Delta = \begin{cases} \delta < 0 & \text{منحنی در این حالت به دو خط موهولی یا یک نقطه تبدیل می شود.} \\ \delta > 0 & \text{مقطع به دو خط متقاطع تبدیل می شود.} \\ \delta = 0 \Rightarrow B^2 - AC = 0 \Rightarrow c = \frac{B^2}{A} & \text{۳.} \end{cases}$$

و اگر در این حالت به جای $c = \frac{B^2}{A}$ مقدارگذاری

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \frac{B^2}{A} & D \\ B & \frac{B^2}{A} & E \\ D & \frac{B^2}{A} & F \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} \frac{B^2}{A} & D \\ \frac{B^2}{A} & E \end{vmatrix} - E \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} A & B \\ B & \frac{B^2}{A} \end{vmatrix} = 0$$

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f'x = 0 \Rightarrow 2Ax + 2By + 2Dz = 0 \Rightarrow Ax + By + Dz = 0 \\ f'y = 0 \Rightarrow 2Bx + 2cy + 2Ez = 0 \Rightarrow Bx + cy + Ez = 0 \\ f'z = 0 \Rightarrow 2Dx + 2Ey + 2Fz = 0 \Rightarrow Dx + Ey + Fz = 0 \end{cases}$$

دستگاه سه معادله سه مجهولی بالا، یک دستگاه همگن است. شرط وجود جواب در این دستگاه آن است که دترمینان ضرایب آن مخالف صفر باشد. یعنی:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0$$

حال فرض می کنیم، این مقطع مخروطی مرکزدار از نوع هذلولی باشد. بنابراین باید بتوانیم نقاط بینهایت دور این مقطع را به دست آوریم تا به کمک آن ها معادلات مجانب های مقطع را به دست آوریم. برای این کار اگر در فرم همگن شده معادله مقدار Z را صفر کنیم، نقاط بینهایت دور به دست می آید. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \\ z \rightarrow 0 \end{cases}$$

وقتی که $z \rightarrow 0$ ، آن گاه:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 = 0 \quad (2)$$

در دیفرانسیل فرا گرفته ایم که شیب خط مجانب مایل از تساوی زیر به دست می آید:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$$

بنابراین طرفین رابطه (۲) را به x^2 تقسیم می کنیم و اگر $x \rightarrow \pm\infty$ میل دهیم، خواهیم داشت:

$$A + 2B \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} + C \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow A + 2Bm + cm^2 = 0$$

معادله درجه دوم بالا، یعنی: (۳) $cm^2 + 2Bm + A = 0$ را در نظر می گیریم و در تعداد جواب های آن بحث می کنیم:

$$\Delta = 4B^2 + 4AC = 4(B^2 - AC) = 4\delta$$

$$\delta = B^2 - AC$$

۱. اگر $\delta > 0$ ، یعنی معادله (۳) دو ریشه دارد، پس منحنی دارای ۲ مجانب است، در نتیجه مقطع هذلولی است. به خصوص اگر $A+C=0$ باشد، هذلولی متساوی القطرین یا متساوی الساقین است.



برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط اشتراک

به ازای هر عنوان مجله درخواستی، واریز مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال به عنوان علی الحساب به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخره حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک الزامی است.

• مجله درخواستی:

• نام و نام خانوادگی:

• تاریخ تولد: • تحصیلات:

• تلفن:

• نشانی کامل پستی:

..... استان: شهرستان:

..... خیابان:

..... کوچه:

..... پلاک: کد پستی:

• مبلغ واریز شده:

• شماره و تاریخ رسید بانکی:

امضا:

نشانی: تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
www.roshdmag.org نشانی اینترنتی:
info@roshdmag.org پست الکترونیک:
تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۳۳۶۶۵۶

- لطفاً مشخصات و نشانی خود را کامل و خوانا بنویسید. (هزینه برگشت مجله در صورت کامل نبودن نشانی، به عهده مشترک است).
- ارسال اصل رسید بانکی ضروری است.
- مبنای شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است.
- برای هر عنوان مجله، فرم جداگانه تکمیل شود (تصویر فرم نیز مورد قبول است).

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{A}(AE - BD)^2 = 0 \Rightarrow AE - BD = 0 \Rightarrow E = \frac{BD}{A}$$

اگر این مقدار را در معادله کلی مقطع مخروطی جایگزین

کنیم و $C = \frac{B^2}{A}$ قرار دهیم، معادله به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{A}(Ax - By)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

با توجه به تساوی $E = \frac{BD}{A}$ در معادله مقطع مخروطی

خواهیم داشت:

$$(Ax - By)^2 + 2D(Ax + By) + AF = 0 \Rightarrow \delta' = D^2 - AF$$

حال توجه داریم که اگر معادله بالا دو ریشه متمایز داشته باشد، این ریشه ها نمایش دو خط موازی هستند و اگر ریشه مضاعف داشته باشد، نمایش دو خط منطبق بر هم است و اگر ریشه حقیقی نداشته باشد، ریشه های موهومی نمایش دو خط موازی موهومی هستند. بحث بالا را به صورت زیر خلاصه می کنیم:

$$\begin{cases} \delta = B^2 - AC & \begin{cases} D^2 - AF > 0 & \text{۱. مقطع به دو خط موازی حقیقی تبدیل می شود:} \\ D^2 - AF = 0 & \text{۲. مقطع به دو خط منطبق بر هم تبدیل می شود:} \\ D^2 - AF < 0 & \text{۳. مقطع به دو خط موازی موهومی تبدیل می شود:} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta > 0 & (۱) \\ \delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} A\Delta < 0 & (۲) \\ A\Delta > 0 & (۳) \end{cases} \\ \delta = 0 & (۴) \end{cases} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta > 0 & (۵) \\ \delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} A\Delta < 0 & (۶) \\ A\Delta > 0 & (۷) \end{cases} \\ \delta = 0 & (۸) \end{cases} \end{cases}$$

۱. مرکزدار تجزیه نشده هذلولی
۲. مرکزدار بیضی حقیقی
۳. مرکزدار بیضی موهومی
۴. مقطع سهمی است.
۵. مقطع مرکزدار هذلولی اگر $A + C = 0$ هذلولی متساوی الساقین
۶. مرکزدار بیضی حقیقی
۷. مرکزدار بیضی موهومی
۸. مقطع سهمی است

ادامه دارد



برای دانش آموزان دوره متوسطه