

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم

قسمت ۲

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله ی درجه ی سوم را در شماره ی قبل دیدیم. اینک ادامه مطلب را در پی می آوریم.

محمد هاشم رستمی

- مقدار $4p^3 + 27q^2$ را مبین معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ می نامند و با Δ نشان می دهند:
- $$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$
- همان طوری که دیدیم:
۱. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد، معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ سه ریشه ی متمایز دارد.
 ۲. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ باشد، معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ یک ریشه ی ساده و یک ریشه ی مضاعف دارد.
 ۳. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد، معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد.
- بنابراین، تعداد ریشه های معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ را با استفاده از علامت مبین آن یعنی علامت $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ می توان تعیین کرد.
- نکته: برای تعیین علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ ، از علامت q استفاده می کنیم.
- بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ ، باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم.
- بحث های انجام شده تا کنون را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{معادله یک ریشه ی منفی دارد. } q > 0 \\
 \text{معادله یک ریشه ی مثبت دارد. } q < 0
 \end{array} \right\} p > 0 \Rightarrow \text{معادله تنها یک ریشه دارد}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت است. } q > 0 \\
 \text{یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی است. } q < 0
 \end{array} \right\} \Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0 \Rightarrow \text{معادله سه ریشه ی متمایز دارد}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{ریشه ی ساده منفی و ریشه ی مضاعف مثبت است. } q > 0 \\
 \text{ریشه ی ساده مثبت و ریشه ی مضاعف منفی است. } q < 0
 \end{array} \right\} \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0 \Rightarrow \text{معادله یک ریشه ی ساده و یک ریشه ی مضاعف دارد}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{یک ریشه ی منفی دارد. } q > 0 \\
 \text{یک ریشه ی مثبت دارد. } q < 0
 \end{array} \right\} \Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0 \Rightarrow \text{معادله تنها یک ریشه دارد}$$

ث) در این معادله نیز $p = -3 < 0$ است، بنابراین باید مبین آن را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p = -3, q = 2, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-3)^2 + 27(-2)^2 = -108 + 108 \Rightarrow \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 0$$

پس این معادله یک ریشه ی مضاعف و یک ریشه ی ساده دارد.

ج) معادله ی $2x^2 - x^2 + 5 = 0$ را نخست باید به صورت $X^2 + PX + q = 0$ درآوریم. چون ضریب x در این معادله

صفر است، فرض می کنیم: $x = \frac{1}{X}$. خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{1}{X}\right)^2 - \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 5 = 0 \Rightarrow \frac{2}{X^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{5}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 - X + 5X^2}{X^2} = 0 \Rightarrow 2 - X + 5X^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5X^2 - X + 2 = 0 \Rightarrow X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{2}{5} = 0$$

$$p = -\frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 27\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{-4}{125} + \frac{108}{125} \Rightarrow \Delta = \frac{536}{125} > 0 \Rightarrow$$

پس معادله ی $X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{2}{5} = 0$ تنها یک ریشه دارد. در

نتیجه، معادله ی داده شده، یعنی معادله ی $2x^2 - x^2 + 5 = 0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

ج) معادله ی درجه ی سوم کامل $2x^3 + 6x^2 - 4x + 7 = 0$ را باید به صورت معادله ی درجه ی سوم ناقص $X^3 + PX + q = 0$ درآوریم. برای این کار فرض می کنیم:

$$x = X - \frac{b}{3a} \text{ داریم}$$

$$a = 2, b = 6, x = X - \frac{b}{3a} = X - \frac{6}{3 \times 2} = X - \frac{6}{6} = X - 1$$

$$\Rightarrow x = X - 1 \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} 2(X-1)^3 + 6(X-1)^2 - 4(X-1) + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 2(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 6(X^2 - 2X + 1) - 4X + 4 + 7 = 0$$

$$2X^3 - 6X^2 + 6X - 2 + 6X^2 - 12X + 6 - 4X + 11 = 0$$

$$\Rightarrow 2X^3 - 10X + 9 = 0 \Rightarrow X^3 - 5X + \frac{9}{2} = 0$$

نکته ی مهم: در حالتی که معادله سه ریشه ی متمایز دارد، برای تعیین ریشه های معادله فرض می کنیم $x = p \cos \theta$ باشد

$$\text{که در آن: } \rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \text{ و } \cos 3\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}} \text{ است.}$$

باید توجه داشت که برای θ بی شمار جواب به دست می آید، اما برای $\cos \theta$ تنها سه مقدار به دست می آید. پس از محاسبه ی ρ و $\cos \theta$ ، آن ها را در رابطه ی $x = p \cos \theta$ قرار می دهیم تا x_1, x_2 و x_3 جواب های معادله به دست آیند. اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال ۱. بدون حل کردن معادله های زیر، تعداد جواب های هریک از آن ها را تعیین کنید:

الف) $x^2 + 2x + 4 = 0$

ب) $x^2 + 5x - 12 = 0$

پ) $x^2 - 3x + 5 = 0$

ت) $x^2 - 5x - 1 = 0$

ث) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ج) $2x^2 - x^2 + 5 = 0$

ج) $2x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0$

حل: داریم:

الف) در این معادله $p = 2 > 0$ است، پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ب) در این معادله نیز $p = 5 > 0$ است. پس این معادله نیز تنها یک ریشه دارد.

پ) در این معادله $p = -3 < 0$ است، بنابراین برای تعیین تعداد جواب ها باید علامت $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -3, q = 5, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-3)^2 + 27(5)^2$$

$$\Rightarrow \Delta = -108 + 675 = 467 > 0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ت) در این معادله نیز $p = -5 < 0$ است، پس باید علامت $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -5, q = -1, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-5)^2 + 27(-1)^2$$

$$\Rightarrow \Delta = -500 + 27 = -473 < 0$$

یعنی این معادله سه ریشه ی متمایز دارد.

ریشه منفی است.

(ت)

$$x^2 - 3x - 1 = 0, \quad p = -3, \quad q = -1, \quad \Delta = 4p^2 + 27q^2$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(-3)^2 + 27(-1)^2 = -108 + 27 = -81 < 0$$

یعنی این معادله سه ریشه ی متمایز دارد و چون $q = -1 < 0$ ، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند.

(ث) معادله ی $2x^2 + 5x^2 - 1 = 0$ را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$

به صورت معادله ی درجه ی سوم $x^2 + px + q = 0$

درمی آوریم. داریم:

$$2\left(\frac{1}{X}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{X}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{X^2} + \frac{5}{X^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2+5X-X^2}{X^2} = 0 \Rightarrow 2+5X-X^2 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - 5x - 2 = 0, \quad p = -5, \quad q = -2$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-5)^2 + 27(-2)^2$$

$$= -500 + 108 = -392 < 0$$

یعنی این معادله سه ریشه ی متمایز دارد که چون

$q = -2 < 0$ ، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند. بدیهی

است که علامت ریشه های معادله ی $X^2 - 5X - 2 = 0$ ، همان

علامت ریشه های معادله ی $2x^2 + 5x^2 - 1 = 0$ است.

(ج) معادله ی $-3x^2 + x^2 - x + 2 = 0$ را با تغییر متغیر

$$x = X - \frac{b}{2a}$$

$$X^2 + pX + q = 0 \text{ تبدیل می کنیم. داریم:}$$

$$a = -3, \quad b = 1, \quad x = X - \frac{b}{2a} = X - \frac{1}{-6} = X + \frac{1}{6}$$

$$x = X + \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} -3\left(X + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(X + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(X + \frac{1}{6}\right) + 2 = 0$$

$$-3\left(X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{36}\right) + \left(X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{36}\right) - X - \frac{1}{6} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -3X^2 - X^2 - \frac{1}{9}X - \frac{1}{36} + X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{36} - X - \frac{1}{6} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -3X^2 - \frac{1}{9}X + \frac{29}{36} = 0 \Rightarrow X^2 + \frac{1}{27}X - \frac{29}{108} = 0$$

در این معادله $p = \frac{1}{27} > 0$ است. پس این معادله تنها یک

$$p = -5, q = +\frac{9}{4}, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-5)^2 + 27\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$= \Delta = -500 + \frac{2187}{4} = \frac{187}{4} > 0$$

پس معادله ی $X^2 - 5X + \frac{9}{4} = 0$ تنها یک ریشه دارد و در

نتیجه، معادله ی $2x^2 + 6x^2 - 4x + 7 = 0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

مثال ۲. تعداد ریشه ها و علامت ریشه های معادله های زیر را بدون حل کردن معادله، تعیین کنید.

الف) $x^2 + 7x + 2 = 0$

ب) $x^2 + 5x - 3 = 0$

پ) $x^2 - 3x + 4 = 0$

ت) $x^2 - 3x - 1 = 0$

ث) $2x^2 + 5x^2 - 1 = 0$

ج) $-3x^2 + x^2 - x + 2 = 0$

حل. برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی

درجه ی سوم $x^2 + px + q = 0$ باید $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

الف) $x^2 + 7x + 2 = 0, \quad p = 7, \quad q = 2$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(7)^2 + 27(2)^2$$

$$= 4 \times 49 + 108 = 148 > 0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q = 2 > 0$ ، این

ریشه منفی است.

نکته: در این معادله چون $p = 7 > 0$ است، این معادله یک

ریشه دارد و نیازی به محاسبه ی $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ نیست.

علامت ریشه هم از روی علامت q مشخص می شود.

ب) در معادله ی $x^2 + 5x - 3 = 0$ نیز، چون $p = 5 > 0$

است، این معادله یک ریشه دارد که چون $q = -3 < 0$ ، این

ریشه مثبت است.

پ) در معادله ی $x^2 - 3x + 4 = 0$ ، $p = -3 < 0$ است و

برای تعیین تعداد ریشه ها، باید $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین

کنیم. داریم:

$$p = -3, \quad q = 4$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-3)^2 + 27(4)^2 = 400 > 0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q = 4 > 0$ ، این

$$x = \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{81}{27}}} + \sqrt{\frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{81}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{-1 + \sqrt{1+3}} + \sqrt{-1 - \sqrt{1+3}} = \sqrt{-1+2} + \sqrt{-1-2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1} + \sqrt{-3} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{3}$$

(پ) در این معادله $p = -12 < 0$ است. پس باید علامت $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow p = -12, q = 16, \Delta = 4p^2 + 27q^2$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(-12)^2 + 27(16)^2 = -6912 + 6912 = 0$$

یعنی این معادله یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده دارد که از دستورهای زیر به دست می‌آیند:

$$\text{ریشه مضاعف} = x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{q}{2}} = \sqrt{\frac{16}{2}} = \sqrt{8} = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

$$\text{ریشه ساده} = x_3 = -2\sqrt{\frac{q}{2}} = -2(2) = -4 \Rightarrow x_3 = -4$$

(ت) در معادله $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ ، $p = -3 < 0$ است.

پس برای تعیین تعداد ریشه‌های آن باید علامت $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -3, q = \sqrt{2}, \Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-3)^2 + 27(\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \Delta = -108 + 54 = -54 < 0$$

نتیجه می‌گیریم که این معادله سه ریشه دارد. برای حل آن فرض می‌کنیم: $x = p \cos \theta$ باشد، با توجه به این که:

$$\cos 3\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}} \text{ و } \rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

خواهیم داشت:

$$\rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} = 2\sqrt{\frac{+3}{3}} = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow \rho = 2$$

$$\cos 3\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2(-3)\sqrt{\frac{3}{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{-6} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos 3\theta = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3\theta = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$$

ریشه دارد که چون $q = -\frac{29}{81} < 0$ ، آن گاه این ریشه مثبت است. در نتیجه، ریشه‌ی معادله داده شده نیز مثبت است؛

$$\text{زیرا: } x = X + \frac{1}{q}$$

مثال ۳. معادله‌های زیر را حل کنید:

(الف) $x^2 + 4x - \frac{37}{27} = 0$

(ب) $x^2 + 3\sqrt{3}x + 2 = 0$

(پ) $x^2 - 12x + 16 = 0$

(ت) $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

(ث) $2x^3 - 6x^2 + x - 2 = 0$

(ج) $-4x^2 + x^2 + \frac{1}{4} = 0$

حل:

(الف) در معادله $x^2 + 4x - \frac{37}{27} = 0$ ، $p = 4 > 0$ است.

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که آن را از دستور کاردان محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$p = 4, q = -\frac{37}{27}$$

$$x = \sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{37}{54} + \sqrt{\frac{1369}{2916} + \frac{64}{27}}} + \sqrt{\frac{37}{54} - \sqrt{\frac{1369}{2916} + \frac{64}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{37}{54} + \sqrt{\frac{8281}{2916}}} + \sqrt{\frac{37}{54} - \sqrt{\frac{8281}{2916}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{37}{54} + \frac{91}{54}} + \sqrt{\frac{37}{54} - \frac{91}{54}} = \sqrt{\frac{128}{54}} + \sqrt{\frac{-54}{54}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{64}{27}} + \sqrt{-1} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

یعنی تنها ریشه‌ی این معادله $x = \frac{1}{3}$ است.

(ب) در این معادله نیز $p = 3\sqrt{3} > 0$ است. پس تنها یک ریشه دارد که برای حل آن از دستور کاردان استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x^2 + 3\sqrt{3}x + 2 = 0 \Rightarrow p = 3\sqrt{3}, q = 2$$

$$\begin{aligned}
 x &= X+1 \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} 2(X+1)^2 - 6(X+1)^2 + (X+1) - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow 2X^2 + 6X^2 + 6X + 2 - 6X^2 - 12X - 6 + X + 1 - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow 2X^2 - 5X - 6 = 0 \Rightarrow X^2 - \frac{5}{2}X - 3 = 0, \quad p = -\frac{5}{2}, \quad q = -3 \\
 \Delta &= 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 27(-3)^2 \\
 &= -\frac{125}{2} + 243 = +\frac{361}{2} > 0
 \end{aligned}$$

یعنی این معادله تنها یک ریشه دارد که اندازه ی آن را از دستور کاردان محاسبه می کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{-\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}} + \sqrt{-\frac{q}{2}} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}} \\
 &\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\
 &\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}
 \end{aligned}$$

ج) معادله ی $-4x^2 + x^2 + \frac{1}{4} = 0$ را نیز باید به معادله ی درجه ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار، چون معادله ی داده شده شامل جمله ی درجه ی اول نسبت به x نیست، فرض می کنیم: $x = \frac{1}{X}$. داریم:

$$\begin{aligned}
 -4\left(\frac{1}{X}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 &\Rightarrow \frac{-4}{X^2} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{4} = 0 \\
 \frac{-16 + 4X + X^2}{4X^2} = 0 &\Rightarrow X^2 + 4X - 16 = 0 \Rightarrow p = 4, \quad q = -16
 \end{aligned}$$

چون $p = 4 > 0$ ، این معادله تنها یک ریشه دارد که از دستور کاردان محاسبه می شود: $X = 2$. پس $x = \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$ ؛ یعنی جواب معادله ی داده شده $x = \frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}\right), k=0 \Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$k=2 \Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos \frac{19\pi}{12} = \cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{این جواب برای } \cos \theta \text{ تکراری است}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{19\pi}{12} = -\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{12} \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{تکراری است}
 \end{aligned}$$

$$k=3 \Rightarrow \cos \theta = \cos(2\pi \pm \frac{\pi}{4}) = \cos(\pm \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تکراری است

اگر به k مقدارهای دیگری از مجموعه ی عددهای صحیح رانست دهیم، خواهیم دید که برای $\cos \theta$ تنها همان سه مقدار $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ، $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست می آید. بنابراین داریم:

$$x = \rho \cos \theta \Rightarrow x_1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 \times -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

ث) نخست باید معادله ی درجه ی سوم کامل صورت $2x^3 - 6x^2 + x - 2 = 0$ را به معادله ی درجه ی سوم ناقص به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار فرض می کنیم: $x = X - \frac{b}{3a}$. داریم:

$$a=2, \quad b=-6 \Rightarrow x = X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{6} = X+1 \Rightarrow x = X+1$$