

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم

● محمد هاشم رستمی

قسمت ۱

اما در حالت های (ب) و (پ)، حل معادله ی درجه ی سوم ناقص، مانند حالت های دیگر نیست و ما اینک در جست و جوی راه حل آن ها هستیم. یعنی، مسئله ای که ما با آن سروکار داریم، حل معادله ی درجه ی سوم کامل و یا حل معادله ی درجه ی سوم ناقص به صورت های زیر است:

$$ax^3 + cx + d = 0 \quad \text{یا} \quad ax^3 + bx^2 + d = 0$$

با توجه به $a \neq 0$ ، با تقسیم کردن دو طرف معادله های (ب) و (پ) بر a داریم:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{d}{a} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad (\text{پ})$$

معادله ی (ب) با فرض $\frac{b}{a} = A$ و $\frac{d}{a} = B$ به صورت

$$x^3 + Ax^2 + B = 0 \quad \text{و معادله ی (پ) با فرض } \frac{c}{a} = P \quad \text{و}$$

$$\frac{d}{a} = Q \quad \text{به صورت } x^3 + px + q = 0 \quad \text{در می آید. نکته ی جالب}$$

توجه آن است که با تبدیل $x = \frac{1}{X}$ در معادله ی (ب)، این معادله

به صورت معادله ی (پ) در می آید. توجه کنید:

معادله ی درجه ی سوم به صورت کلی زیر است:

$$(a \neq 0) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اگر ضرایب های b ، c و d نیز همگی مخالف صفر باشند، معادله ی درجه ی سوم را کامل می نامند؛ مانند معادله های زیر:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = 0$$

اما اگر یکی از ضرایب های b یا c یا d مساوی صفر باشد، معادله ی درجه ی سوم را ناقص می نامند؛ مانند معادله های زیر:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \text{الف) } d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + d = 0 \quad \text{ب) } c = 0$$

$$ax^3 + cx + d = 0 \quad \text{پ) } b = 0$$

$$ax^3 + cx = 0 \quad \text{ت) } b = d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 = 0 \quad \text{ث) } c = d = 0$$

$$ax^3 = 0 \quad \text{ج) } b = c = d = 0$$

حل این معادله ها در حالت های (الف)، (ت)، (ث) و (ج)

ساده است، زیرا با فاکتورگیری از عامل مشترک در حالت های (الف)، (ت) و (ث)، معادله ی درجه ی ۳ به حاصل ضرب یک معادله ی درجه ی اول و یک معادله ی درجه ی دوم تبدیل می شود که با حل آن ها، جواب های معادله به دست می آید و در حالت (ج)، نیز جواب معادله $x = 0$ است.

$$2x^2 - 12x^2 + 5x - 7 = 0$$

(الف)

$$3x^2 + 9x^2 + 5 = 0$$

(ب)

حل: داریم:

الف. در این معادله، $a = 2$ ، $b = -12$ ، $c = 5$ و $d = -7$

است و داریم:

$$x = X - \frac{b}{2a} \Rightarrow x = X - \frac{-12}{2(2)} = X + 2 \Rightarrow x = X + 2$$

پس در معادله ی داده شده X را به $X + 2$ تبدیل می کنیم.

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2(X+2)^2 - 12(X+2)^2 + 5(X+2) - 7 &= 0 \\ \Rightarrow 2(X^2 + 4X + 4) - 12(X^2 + 4X + 4) - 12(X^2 + 4X + 4) \\ + 5X + 10 - 7 &= 0 \\ \Rightarrow 2X^2 + 12X^2 + 24X + 16 - 12X^2 - 48X \\ - 48 + 5X + 10 - 7 &= 0 \\ \Rightarrow 2X^2 - 19X - 29 &= 0 \end{aligned}$$

طرفین این معادله را بر ضریب X^2 یعنی بر ۲ تقسیم

می کنیم. داریم:

$$X^2 - \frac{19}{2}X - \frac{29}{2} = 0$$

و این معادله به صورت $X^2 + pX + q = 0$ است

$$(q = -\frac{29}{2} \quad p = -\frac{19}{2})$$

نکته: می توانستیم در دستور (*) به جای a, b, c و d مقدار قرار دهیم تا معادله ی بالا به دست آید. اما حفظ کردن دستور (*) مشکل است، پس ترجیح دارد، به روش مستقیم عمل کنیم.

(ب) در معادله ی $3x^2 + 9x^2 + 5 = 0$ سوم

داریم:

$$a = 3 \text{ و } b = 9 \text{ و } c = 0 \text{ و } d = 5$$

$$x = X - \frac{b}{2a} \Rightarrow x = X - \frac{9}{2(3)} = X - 1 \Rightarrow x = X - 1$$

$$\begin{aligned} x = X - 1 \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} 3(X-1)^2 + 9(X-1)^2 + 5 &= 0 \\ \Rightarrow 3(X^2 - 2X + 1) + 9(X^2 - 2X + 1) + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{X}, x^2 + Ax^2 + B = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{X})^2 + A(\frac{1}{X})^2 + B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^2} + \frac{A}{X^2} + \frac{B}{1} = 0 \Rightarrow \frac{1 + AX + BX^2}{X^2} = 0 \Rightarrow$$

$$BX^2 + AX + 1 = 0 \Rightarrow X^2 + \frac{A}{B}X + \frac{1}{B} = 0$$

$$\Rightarrow X^2 + PX + q = 0$$

اما نکته ی جالب تر آن است که با تبدیل $x = X - \frac{b}{2a}$

معادله ی درجه ی سوم کامل $ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$ نیز به

معادله ی درجه ی سوم ناقص $X^2 + PX + q = 0$ تبدیل

می شود. (چرا؟) توجه کنید:

$$ax^2 + bx + cx + d = 0 \text{ و } x = X - \frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow a(X - \frac{b}{2a})^2 + b(X - \frac{b}{2a}) + c(X - \frac{b}{2a}) + d = 0$$

$$\Rightarrow a(X^2 - 2X \times \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}) + b(X - \frac{b}{2a}) + c(X - \frac{b}{2a}) + d = 0$$

$$+ b(X^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{2b}{2a}X) + cX - \frac{bc}{2a} + d = 0$$

$$\Rightarrow aX^2 - bX^2 + \frac{b^2}{2a}X - \frac{b^2}{2a} + bX^2 + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$- \frac{2b^2}{2a}X + cX - \frac{bc}{2a} + d = 0$$

$$\Rightarrow aX^2 + (\frac{-b^2}{2a} + c)X + (\frac{2b^2}{2a} - \frac{bc}{2a} + d) = 0$$

$$\Rightarrow X^2 + (-\frac{b^2}{2a} + \frac{c}{a})X + (\frac{2b^2}{2a} - \frac{bc}{2a} + \frac{d}{a}) = 0 \quad (*)$$

$$\frac{2b^2}{2a} - \frac{bc}{2a} + \frac{d}{a} = q \text{ و } \frac{-b^2}{2a} + \frac{c}{a} = p$$

خواهیم داشت:

$$X^2 + pX + q = 0$$

مثال. معادله های درجه ی سوم زیر را به صورت معادله ی

درجه ی سوم $X^2 + PX + q = 0$ در آورید.

است در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم
ناقص $X^3 + pX + q = 0$ بحث کنیم.

برای این کار، معادله ی بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$X^3 + pX + q = 0 \Rightarrow X^3 + pX = -q$$

اما این معادله، معادله ی تقاطع منحنی تابع $y = X^3 + pX$ و خط $y = -q$ است.

$$\begin{cases} y = X^3 + pX \\ y = -q \end{cases}$$

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم $X^3 + pX + q = 0$ کافی است، طول های نقطه های برخورد منحنی $y = X^3 + pX$ و خط $y = -q$ را تعیین کنیم. برای این کار، این منحنی و خط را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کنیم و به ازای مقدارهای متفاوت p و q ، تعداد نقطه های برخورد آن ها و اندازه ی جبری طول این نقطه های برخورد را تعیین می کنیم.

نکته ی مهم ۲. هرگاه معادله ی درجه ی سوم داده شده، خود به صورت $X^3 + px + q = 0$ باشد، برای بحث در وجود و علامت ریشه های آن نیازی به تغییر متغیر نیست و این معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^3 + px = -q$$

این معادله، معادله ی تقاطع منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط راست $y = -q$ است. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ ، منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط $y = -q$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کنیم و تعداد نقطه های برخورد آن ها و همچنین اندازه ی جبری طول نقطه های برخوردشان را به ازای مقدارهای متفاوت p و q مشخص می سازیم.

بدیهی است که به تعداد نقطه های برخورد منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط $y = -q$ ، معادله ی درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ دارای جواب است و علامت ریشه ها را نیز با توجه به محل نقطه های تقاطع می توان تعیین کرد. برای رسم نمودار تابع $y = x^3 + px$ ، مشتق این تابع را محاسبه می کنیم و مساوی صفر قرار می دهیم. داریم:

$$y = x^3 + px \Rightarrow y' = 3x^2 + p, \quad y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0$$

$$\Rightarrow 3X^2 - 9X^2 + 9X - 3 + 9X^2 - 18X + 9 + 5 = 0$$

$$3X^2 - 9X + 11 = 0$$

دو طرف این معادله را بر ضریب X^2 یعنی بر ۳ تقسیم می کنیم. خواهیم داشت:

$$X^2 - 3X + \frac{11}{3} = 0$$

و این معادله به صورت $X^2 + PX + q = 0$ است
($q = \frac{11}{3}$, $P = -3$).

نکته ی ۱. برای تبدیل معادله ی $3x^3 + 9x^2 + 5 = 0$ به معادله ی درجه ی سوم به صورت $X^3 + PX + q = 0$ ، می توانیم از تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$ استفاده کنیم. توجه کنید:

$$3x^3 + 9x^2 + 5 = 0, x = \frac{1}{X} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 9\left(\frac{1}{X}\right)^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{X^3} + \frac{9}{X^2} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{3 + 9X + 5X^3}{X^3} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + 9X + 5X^3 = 0 \Rightarrow 5X^3 + 9X + 3 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 + \frac{9}{5}X + \frac{3}{5} = 0$$

و این معادله به صورت $X^3 + pX + q = 0$ است.

نکته ی ۲. چون در روش اول $x = X - 1$ و در روش دوم $x = \frac{1}{X}$ اختیار شده است، پس معادله های ناقص به دست آمده در دو روش بالا، از نظر ضرایب عددی، متفاوت خواهند بود؛ یعنی نباید این تصور را داشته باشیم که در هر دو راه حل، به یک معادله ی درجه ی سوم ناقص به صورت $X^3 + pX + q = 0$ و با ضرایب یکسان می رسیم.

نکته ی ۳. به طور کلی، معادله ی درجه ی سوم $ax^3 + bx^2 + d = 0$ ، با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$ ، به معادله ی درجه ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می شود.

نکته ی مهم ۱. با توجه به مطالب بیان شده، هر معادله ی درجه ی سوم کامل را می توان با استفاده از تغییر متغیر، به معادله ی درجه ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کرد. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم کامل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ کافی

خط $y = -q$ ، نمودار تغییرات تابع $y = x^3 + px$ را تنها

در یک نقطه قطع می کند که:

۱. اگر $-q > 0$ ، یعنی $q < 0$ باشد، طول نقطه ی تلاقی

مثبت است. لذا معادله ی $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه ی مثبت دارد (شکل الف).

۲. اگر $-q < 0$ ، یعنی $q > 0$ باشد، طول نقطه ی تلاقی

منفی است. لذا معادله ی $x^3 + px + q = 0$ ، تنها یک ریشه ی منفی دارد (شکل ب).

پس در حالت اول، یعنی وقتی $p > 0$ است، معادله ی

درجه ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد که علامت

آن مخالف علامت q است و اندازه ی این ریشه از دستور زیر

که به دستور «کاردان» معروف است به دست می آید:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{3} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{3} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

حالت دوم: $p < 0$ است. در این حالت مشتق دو ریشه

دارد:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

چون دو ریشه متمایزند، پس تابع دو نقطه ی ماکزیمم و

می نیمم دارد. برای تعیین اندازه ی ماکزیمم یا می نیمم تابع باید

ریشه های مشتق، یعنی $x = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $x = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ را در تابع

قرار دهیم. داریم:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_1 = \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{+p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} - p \sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{-2p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_2 = \left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} + p \sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{2p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $p > 0$ است. در این صورت، مشتق ریشه

ندارد، زیرا:

$$3x^2 + p = 0 \Rightarrow 3x^2 = -p \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} < 0$$

بنابراین، جهت تغییرات تابع در این حالت ثابت است که

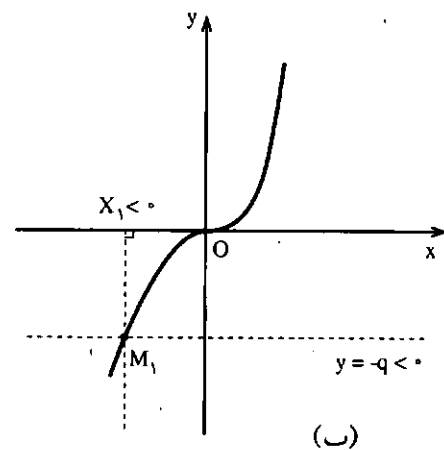
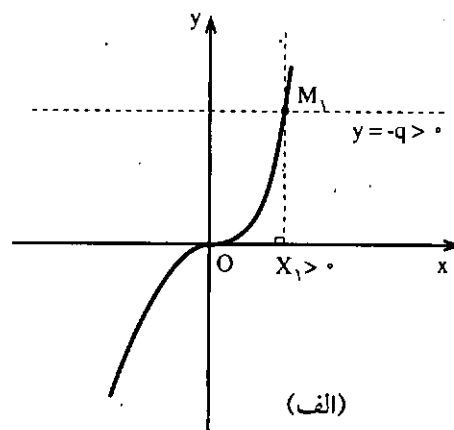
چون ضریب x^2 در مشتق مثبت است، مشتق تابع همواره مثبت

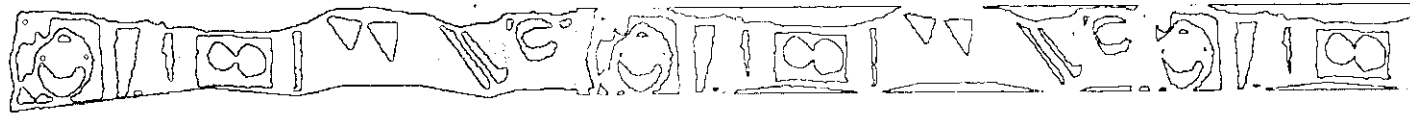
و نمایش تغییرات آن همواره صعودی است. جدول تغییرات

این تابع در این حالت به صورت زیر و نمودار آن به صورت

شکل زیر است.

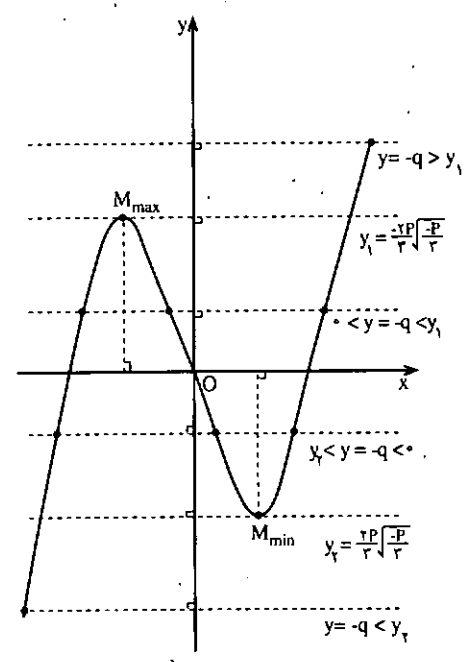
x	$-\infty$				$+\infty$
y'		+	+	+	
y	$-\infty$	↗	•	↗	$+\infty$





جدول تغییرات تابع در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$\searrow \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$+\infty$
		max	min	



نمودار تغییرات تابع در این حالت، به صورت شکل بالا است. اکنون اگر خط $y = -q$ را در همین دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، وقتی q در بازه $(-\infty, +\infty)$ تغییر کند، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱. اگر $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < y = -q < \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، یا

$q^2 < \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد، خط $y = -q$ ،

نمودار تغییرات تابع $y = x^3 + px + q$ را در سه نقطه قطع می‌کند؛ یعنی معادله $x^3 + px + q = 0$ سه ریشه دارد. در این صورت، اگر $-q < 0$ ، یعنی $q > 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت است. و اگر $-q > 0$ ، یعنی $q < 0$ باشد، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی خواهد داشت.

۲. اگر خط $y = -q$ بر نمودار تغییرات تابع مماس باشد،

یعنی $q^2 = \frac{-4p^3}{27}$ یا $-q = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، و یا $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، یعنی

$q^2 = \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3 + 27q^2 = 0$ باشد، معادله‌ی

$x^3 + px + q = 0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد که:

● اگر $-q < 0$ ، یعنی $q > 0$ باشد، ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.

● و اگر $-q > 0$ ، یعنی $q < 0$ باشد، ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.

در این حالت، ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مضاعف از دستوره‌ای زیر به دست می‌آیند:

$$\text{ریشه‌ی ساده} = x_1 = -2\sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} = x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

۳. اگر $-q$ خارج بازه‌ی $[y_1, y_2]$ ، یعنی

یا $-q > y_1 = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $-q < y_2 = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، و یا

$q^2 > \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد، خط $y = -q$

نمودار تغییرات تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

● اگر $-q < 0$ ، یعنی $q > 0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع منفی است.

● اگر $-q > 0$ ، یعنی $q < 0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع مثبت است.

پس در این حالت معادله تنها یک ریشه دارد که اگر $q > 0$ باشد، ریشه‌ی معادله منفی است و اگر $q < 0$ باشد، ریشه‌ی معادله مثبت است.

نکته: با توجه به این‌که وقتی $p > 0$ است،

$4p^3 + 27q^2 > 0$ است، می‌توان گفت که اگر در معادله‌ی

$x^3 + px + q = 0$ ، $4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد، معادله تنها یک

ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است.

ادامه دارد...