

۱

برای دانش آموزان پایه ی دوم

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم پارامتری

محمد هاشم رستمی

پارامتری $0 = (2m-1)x^2 - mx + m-3$ به ازای مقدارهای مختلف m بحث کنید.

حل:

Δ را محاسبه و تعیین علامت می کنیم، داریم:

$$a = 2m - 1, \quad b = -m, \quad c = m - 3,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(2m-1)(m-3)$$

$$= m^2 - 4(2m^2 - 7m + 3)$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 8m^2 + 28m - 12 \Rightarrow \Delta = -7m^2 + 28m - 12$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow -7m^2 + 28m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-28 \pm \sqrt{784 - 336}}{-14}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-28 \pm \sqrt{448}}{-14} = \frac{-28 \pm 8\sqrt{7}}{-14} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{7}}{-7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-14 + 4\sqrt{7}}{-7} = \frac{14 - 4\sqrt{7}}{7} \\ m = \frac{-14 - 4\sqrt{7}}{-7} = \frac{14 + 4\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

الف) بحث در وجود ریشه های معادله ی درجه دوم پارامتری

اگر مبین معادله ی درجه دوم یک مجهولی $ax^2 + bx + c = 0$ را بنامیم، یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ باشد، می دانیم که:

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه ی متمایز دارد.

۲. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ریشه ی مضاعف دارد.

۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

بنابراین برای بحث در وجود ریشه های معادله ی درجه

دوم یک مجهولی پارامتری، کافی است، $\Delta = b^2 - 4ac$

(یا $\Delta' = b'^2 - ac$) را تعیین علامت کنیم. برای این کار

را بر حسب پارامتر موجود در معادله (مثلاً بر حسب m) به

دست می آوریم و علامت آن را در یک جدول که بر حسب

مقدارهای صعودی پارامتر تشکیل می دهیم، مشخص

می سازیم. آن گاه با توجه به علامت به دست آمده برای Δ ،

وجود ریشه های معادله را در هریک از بازه های جدول

بررسی می کنیم.

به این مثال ها توجه کنید:

مثال ۱. در وجود ریشه های معادله ی درجه ی دوم

حل:

Δ یا Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = m - 2, \quad b = -2(m + 3) \Rightarrow b' = \frac{b}{2} = -(m + 3),$$

$$c = m + 4,$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m + 3)^2 - (m - 2)(m + 4) \\ = m^2 + 9 + 6m - m^2 - 2m + 8$$

$$\Rightarrow \Delta' = 4m + 17, \quad \Delta' = 0 \Rightarrow 4m + 17 = 0 \Rightarrow m = -\frac{17}{4}$$

m	$-\infty$	$-\frac{17}{4}$	$+\infty$
Δ'	—	0	+
R	ریشه ندارد	ریشه متمایز دارد	ریشه مضاعف دارد

به طوری که دیده می‌شود، به ازای $m < -\frac{17}{4}$ معادله

دارای ریشه حقیقی نیست، به ازای $m = -\frac{17}{4}$ معادله یک

m	$-\infty$	$\frac{14-4\sqrt{7}}{7}$	$\frac{14+4\sqrt{7}}{7}$	$+\infty$
Δ	—	0	+	—
	ریشه ندارد	ریشه متمایز دارد	ریشه مضاعف دارد	ریشه ندارد

بنابراین وقتی $\frac{14-4\sqrt{7}}{7} < m < \frac{14+4\sqrt{7}}{7}$ باشد،

معادله دو ریشه متمایز دارد. به ازای $m = \frac{14-4\sqrt{7}}{7}$ و

$m = \frac{14+4\sqrt{7}}{7}$ معادله یک ریشه مضاعف دارد و هنگامی

که $m < \frac{14-4\sqrt{7}}{7}$ یا $m > \frac{14+4\sqrt{7}}{7}$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده است. به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m ، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + m + 4 = 0$$



ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای $m > -\frac{17}{4}$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۳. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m ، در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر بحث کنید.

$$mx^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$$

حل:

Δ یا Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m, \quad b = 2(m-1) \Rightarrow b' = (m-1), \quad c = 2,$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - m \times 2 = m^2 - 2m + 1 - 2m = m^2 - 4m + 1,$$

$$\Delta' = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$$

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	+	+	+
R			

معادله همواره دو ریشه‌ی متمایز دارد

به طوری که دیده می‌شود، در معادله‌ی داده شده،

$$\Delta' = m^2 - 4m + 1$$

مثبت است. پس این معادله به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده

است. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m ، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$2x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0$$

حل:

Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = 2, \quad b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1), \quad c = m^2 + 1,$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 2(m^2 + 1) = m^2 - 2m + 1 - 2m^2 - 2 = -m^2 - 2m - 1$$

$$\Rightarrow \Delta' = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2, \quad \Delta' = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

m	$-\infty$	-1	$+\infty$
Δ'	-	0	+
R	ریشه ندارد	ریشه مضاعف دارد	ریشه ندارد

ریشه‌ی مضاعف دارد

به طوری که دیده می‌شود، این معادله فقط به ازای $m = -1$ ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای هیچ مقدار دیگری از m ریشه ندارد.

مثال ۵. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$(m^2 + 2)x^2 + 2mx + 3 = 0$$

حل:

Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m^2 + 2, \quad b = 2m \Rightarrow b' = m, \quad c = 3, \quad \Delta' = b'^2 - ac$$

$$\Rightarrow \Delta' = m^2 - (m^2 + 2) \times 3 \Rightarrow \Delta' = -2m^2 - 6, \quad \Delta' = 0$$

$$\Rightarrow -2m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m^2 = -3 < 0$$

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	-	-	-
R			

ریشه ندارد

به طوری که دیده می‌شود، به ازای هر مقداری از پارامتر m ، مبین (Δ') معادله‌ی داده شده منفی است، پس به ازای هیچ مقداری از پارامتر m ، این معادله ریشه ندارد.

نکته: بدون تشکیل جدول نیز مشخص می‌شود که در این معادله، Δ' همواره منفی است، زیرا سه جمله‌ای درجه دوم $\Delta' = -2m^2 - 6$ ریشه ندارد، پس علامت آن همواره موافق علامت ضریب m^2 (یعنی -۲) است یعنی همواره $\Delta' < 0$ است.

مثال ۶. پارامتر a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی

$$3x^2 + 6x + a = 0$$

الف) همیشه دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد؛

ب) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد؛

پ) ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

حل:

الف) باید $\Delta > 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(3)(a) > 0$$

$$\Rightarrow 36 - 12a > 0 \Rightarrow a < 3$$

ب) باید $\Delta = 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 36 - 12a = 0 \Rightarrow 36 = 12a \Rightarrow a = 3$$

پ) باید $\Delta < 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 36 - 12a < 0 \Rightarrow 36 < 12a \Rightarrow a > 3$$

حل:

باید $\Delta < 0$ باشد. داریم:

$$a = 1, b = -2a, c = a + 2, \Delta' = b'^2 - ac < 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - (a + 2) < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 < 0$$

اکنون باید $a^2 - a - 2$ را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -1$$

m	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Δ	+	0	0	+
R	دو ریشه متمایز دارد	ریشه ندارد	دو ریشه متمایز دارد	

ریشه‌ی مضاعف دارد ریشه‌ی مضاعف دارد

به طوری که دیده می‌شود، وقتی $-1 < a < 2$ باشد، $\Delta' < 0$ است و معادله‌ی درجه دوم داده شده ریشه ندارد. پس گزینه‌ی ۳ درست است.

۴. در کدام بازه‌ی متعلق به m ، معادله‌ی زیر دارای ریشه است؟

$$x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$$

$$[-1, 3] \quad (2) \quad m \leq -1, m \geq 2 \quad (1)$$

$$[-1, 3] \quad (4) \quad m < -1, m > 2 \quad (3)$$

حل:

باید $\Delta \geq 0$ باشد، داریم:

$$a = 1, b = m - 1, c = 1, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4(1)(1) \geq 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 3, m = -1$$

m	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Δ'	+	0	0	+
R	دو ریشه متمایز دارد	ریشه ندارد	دو ریشه متمایز دارد	

ریشه‌ی مضاعف دارد ریشه‌ی مضاعف دارد

به طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی $m \geq 3$ یا $m \leq -1$ باشد، معادله ریشه دارد، پس گزینه‌ی (۱) درست است.

مثال ۷. در معادله‌ی $3ax^2 + (3a + 2)x - 2 = 0$ برای چه مقدارهایی از پارامتر a معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

حل:

شرط آن که معادله‌ی بالا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آن است که $\Delta = 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (3a + 2)^2 - 4(3a)(-2) = 0 \Rightarrow$$

$$9a^2 + 4 + 12a + 24a = 0 \Rightarrow 9a^2 + 36a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 36}}{9} = \frac{-18 \pm \sqrt{288}}{9} = \frac{-18 \pm 12\sqrt{2}}{9}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{3}, a = \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{3}$$

آزمون‌ها

۱. به ازای چه مقدارهایی از m ، معادله‌ی $x^2 + mx + m = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

$$(1) 2 \text{ و } (2) 3 \text{ و } (3) 4 \text{ و } (4) 5 \text{ و } (5) 6$$

حل:

داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{m = 0}, m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

پس گزینه‌ی (۳) درست است.

۲. برای آن که معادله‌ی $mx^2 + (2m - 1)x + m + 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، حدود پارامتر m کدام است؟

$$m > \frac{1}{16} \quad (2) \quad m < \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$m \leq \frac{1}{16} \quad (4) \quad m = \frac{1}{16} \quad (3)$$

حل: باید $\Delta > 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4m(m + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$4m^2 + 1 - 4m - 4m^2 - 12m > 0 \Rightarrow -16m + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$-16m > -1 \Rightarrow m < \frac{1}{16}$$

پس گزینه‌ی (۱) درست است.

۳. حدود پارامتر a برای آن که معادله‌ی زیر ریشه نداشته باشد، کدام است؟

$$x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

$$a > -2 \quad (2) \quad -2 < a < 1 \quad (1)$$

$$a < 1 \quad (4) \quad -1 < a < 2 \quad (3)$$