

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم

قسمت ۳

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله ی درجه ی سوم را در شماره ی قبل

دیدیم. اینک ادامه ی مطلب را در پی می آوریم.

● محمد هاشم رستمی

m	$-\infty$	$-\frac{7}{9}$	$\frac{25}{9}$	$+\infty$	
Δ	+	0	-	0	+
R	یک ریشه دارد		سه ریشه دارد		یک ریشه دارد
	یک ریشه ی مضاعف و یک ریشه ی ساده دارد		یک ریشه ی مضاعف و یک ریشه ی ساده دارد		

برای بحث در وجود ریشه های معادله ی درجه ی سوم پارامتری که به صورت $x^3 + px + q = 0$ است، باید به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر داده شده در معادله، $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را تعیین علامت کنیم و برای بحث در وجود و علامت ریشه های این معادله باید $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. به مثال های ذیل توجه کنید:

مثال ۱. در وجود ریشه های معادله ی درجه ی سوم پارامتری $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ ، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حلی: باید $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ را بر حسب m محاسبه و تعیین علامت کنیم. داریم:

مثال ۲. در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی سوم پارامتری $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ ، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m فاصله بحث کنید.

حلی: باید $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4p^2 + 27q^2 = 4(-4)^2 + 27 \times 3(m-2)^2 \\ &= 81(m-2)^2 - 256 \\ \Delta = 0 &\Rightarrow 81(m-2)^2 - 256 = 0 \Rightarrow m = \frac{25}{9}, m = -\frac{7}{9} \\ q &= \sqrt{3}(m-2), q = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(m-2) = 0 \\ &\Rightarrow m-2 = 0 \Rightarrow m = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p &= -4, q = 3(m-2), \\ \Delta &= 4p^2 + 27q^2 = 4(-4)^2 + 27 \times 3(m-2)^2 \\ &\Rightarrow \Delta = -256 + 81(m-1)^2 = 81(m-1)^2 - 256, \Delta = 0 \\ &\Rightarrow 81(m-1)^2 - 256 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = \frac{256}{81} \Rightarrow m-1 = \pm \frac{16}{9} \\ &\Rightarrow m = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}, m = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}\end{aligned}$$

معادله‌ی $X^2 + pX + q = 0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(2m-1)\left(\frac{1}{X}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{X}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{X^2} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2m-1-3X+X^2}{X^2} = 0 \Rightarrow X^2 - 3X + 2m-1 = 0$$

$$p = -3, q = 2m-1, \Delta = 4p^2 + 27q^2$$

$$= 4(-3)^2 + 27(2m-1)^2$$

$$\Delta = 27(2m-1)^2 - 108 = 27[(2m-1)^2 - 4], \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 27[(2m-1)^2 - 4] = 0 \Rightarrow (2m-1-2)(2m-1+2) = 0$$

$$(2m-3)(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m-3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}, 2m+1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$q = 2m-1, q = 0 \Rightarrow 2m-1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
Δ	+	0	-	-	0	+
q	-	-	0	+	+	
X	$X_1 > 0$	$X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 < 0$	

با توجه به این که $x = \frac{1}{X}$ ، علامت ریشه‌های معادله‌ی داده

شده با علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^2 - 3X + 2m-1 = 0$ یکی است و برای تعیین وضع آن‌ها نسبت به هم می‌توانیم در

جدول بالا، $X_1 = \frac{1}{x_1}$ ، $X_2 = \frac{1}{x_2}$ و $X_3 = \frac{1}{x_3}$ را قرار

دهیم.

m	$-\infty$	$-\frac{7}{9}$	2	$\frac{25}{9}$	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	+
q	-	-	0	+	+
R	یک ریشه‌ی مثبت دارد	یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی دارد	یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد	یک ریشه‌ی ساده منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد	یک ریشه‌ی ساده منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد

ریشه‌ی ساده
مثبت و ریشه‌ی
مضاعف منفی دارد

یک ریشه‌ی ساده
صفر و دو ریشه‌ی
قرینه دارد

ریشه‌ی ساده
منفی و ریشه‌ی
مضاعف مثبت دارد

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی

سوم پارامتری زیر به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$x^3 - 3x + 2 - m = 0$$

حل: $\Delta = 4p^2 + 27q^2$ و q را بر حسب m محاسبه و تعیین

علامت می‌کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-3)^2 + 27(2-m)^2 = 27(m^2 - 4m)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 4$$

$$q = 2 - m, q = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
Δ	+	0	-	-	0	+
q	+	+	0	-	-	
R	$X_1 < 0$	$X_1 < X_2 < X_3$		$X_1 < X_2 < X_3$		$X_1 > 0$

$X_1 < X_2 < X_3$

$X_1 < X_2 < X_3$

$X_1 < X_2 < X_3$

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی

سوم پارامتری $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: این معادله را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$ ، به