

در حاشیه هندسه تحلیلی



✪ میر شهرام مدد

بازتابندگی مقاطع مخروطی

هرگاه یک منبع نورانی را در کانون یک آینه سهمومی (مانند چراغ قوه) قرار دهیم، پرتوهای نورانی که از کانون به سهمی می‌تابند، پس از شکست، موازی با محور تقارن سهمی منعکس می‌شوند و برعکس، پرتوهایی که موازی با محور تقارن به سطح سهمی می‌تابند پس از انعکاس در کانون سهمی جمع می‌شوند. به عنوان مثال از این ویژگی برای ساخت کوره‌های آفتابی استفاده می‌کنند.

در شکل ۱، پرتو نوری موازی با محور تقارن به سطح سهمی (آینه شلجمی) برخورد کرده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که این پرتو نور پس از شکست از کانون سهمی عبور می‌کند. برای این منظور، فرض کنیم سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4px$ باشد و خط L را در نقطه $M(x, y)$ بر سهمی مماس می‌کنیم، اکنون ثابت می‌کنیم که $\alpha = \beta$.

در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی با هندسه تحلیلی و مقاطع مخروطی آشنا شده‌اید، از ویژگی‌های جالب و کاربردی مقاطع مخروطی، ویژگی‌های بازتابندگی سهمی‌ها، بیضی‌ها و هذلولی‌ها هستند. در این مقاله سعی داریم با اجتماع هندسه و جبر (یعنی به روش تحلیلی) این ویژگی‌ها را تجزیه و تحلیل و اثبات کنیم.

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

در صورتی که یک سهمی را حول محور تقارنش دوران دهیم و سطح بیرونی آن را نقره‌اندود کنیم، یک آینه سهمومی (شلجمی) پدید می‌آید.

$$= \sqrt{(x_s - p)^T + 2px_s} = \sqrt{x_s^T + p^T + 2px_s}$$

$$= \sqrt{(x_s + p)^T} = (x_s + p) \Rightarrow MF = x_s + p$$

در مثلث FMN داریم: $FN = MF = x_s + p$ ، پس این مثلث متساوی الساقین است، در نتیجه داریم:

$$\omega = \theta$$

چون مثلث SMN در رأس M قائم الزاویه است، بنابراین داریم:

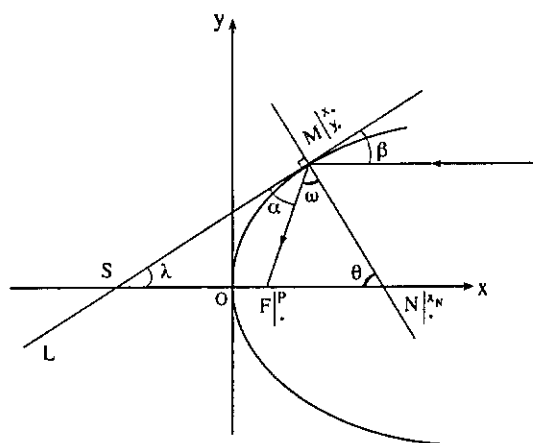
$$\left. \begin{aligned} \lambda + \theta = 90^\circ, \theta = \omega &\Rightarrow \lambda + \omega = 90^\circ \\ \alpha + \omega = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \alpha$$

چون دو زاویه λ و β متبادل هستند در نتیجه: $\lambda = \beta$ ، از طرفی داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \alpha \\ \lambda &= \beta \end{aligned} \right. \Rightarrow \alpha = \beta$$

ویژگی بازتابندگی بیضی

در صورتی که یک بیضی را حول قطر بزرگش دوران دهیم، یک بیضی وار پدید می آید. با نقره اندود کردن درون رویه ی بیضی وار یک آینه بیضوی پدید می آید. در یک آینه بیضوی، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم؛ پرتو نوری که از آن منبع بر آینه می تابند، در امتداد خطی که از کانون دیگر آن می گذرد، منعکس می شود. از این خاصیت بیضی ها در بعضی از سالن های سخنرانی یا سینما استفاده می کنند به طوری که سقف آن ها دارای مقاطعی به شکل قوس های بیضی با کانون های مشترک است. بنابراین، شخصی که در کانون F قرار دارد، می تواند صدای شخص دیگری را بشنود که در کانون F' صحبت می کند. چون امواج صدای شخص صحبت کننده در کانون F' به سقف برخورد می کنند، به وسیله سقف منعکس شده و به شنونده در کانون F می رسند. مطابق شکل ۲، نشان می دهیم که خطوط گذرنده از نقطه M (واقع بر بیضی) و دو کانون آن، با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می دهند؛ یعنی ثابت می کنیم که $\alpha = \beta$.



شکل ۱

ابتدا معادله خط قائم بر سهمی به معادله $y^T = 2px$ را در

نقطه $M \left(\begin{smallmatrix} x_s \\ y_s \end{smallmatrix} \right)$ واقع بر سهمی می نویسیم:

$$y^T - 2px = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-2p}{2y} = \frac{2p}{y}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2p}{y_s} \Rightarrow m' = -\frac{y_s}{2p}$$

مماس قائم

$$\text{معادله خط قائم } y - y_s = -\frac{y_s}{2p}(x - x_s)$$

با توجه به شکل ۱، ملاحظه می کنید که خط قائم محور

x ها را در نقطه N قطع می کند، بنابراین مختصات نقطه $N \left(\begin{smallmatrix} x_N \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

باید در معادله این خط صدق کند، پس داریم:

$$N \left(\begin{smallmatrix} x_N \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow 0 - y_s = -\frac{y_s}{2p}(x_N - x_s) \Rightarrow x_N = 2p + x_s$$

اکنون داریم: $F \left(\begin{smallmatrix} p \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ و $N \left(\begin{smallmatrix} 2p + x_s \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ در نتیجه $FN = p + x_s$.

همچنین داریم: $M \left(\begin{smallmatrix} x_s \\ y_s \end{smallmatrix} \right)$ و $F \left(\begin{smallmatrix} p \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ و $y_s^T = 2px_s$ در نتیجه:

$$MF = \sqrt{(x_s - p)^T + (y_s - 0)^T} = \sqrt{(x_s - p)^T + y_s^T}$$

چون نقطه $\left. \begin{matrix} x. \\ y. \end{matrix} \right| M$ واقع بر بیضی است، پس مختصات M

در معادله بیضی صدق می کند:

$$\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1 \Rightarrow y^r = b^r - \frac{b^r x^r}{a^r} \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$KH^r = \frac{c^r y^r \frac{(cx^r - a^r)^r}{a^r}}{x^r - r cx^r + c^r + b^r - \frac{b^r x^r}{a^r}}$$

$$= \frac{c^r y^r \frac{(cx_r - a^r)^r}{a^r}}{x_r^r (1 - \frac{b^r}{a^r}) + (b^r + c^r) - \gamma cx_r}$$

می‌دانیم که در این بیضی: $a^2 - c^2 = b^2$ ، بنابراین داریم:

$$KH^r = \frac{c^r y^r (cx_r - a^r)^r}{\frac{c^r x_r^r}{a^r} + a^r - r cx_r} = \frac{c^r y^r (cx_r - a^r)^r}{\frac{(cx_r - a^r)^r}{a^r}}$$

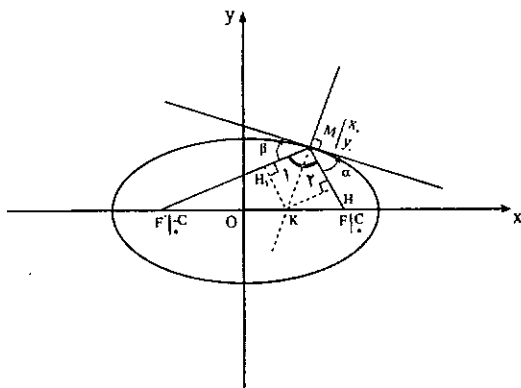
$$= \frac{c^T y^*}{a^T} \Rightarrow \boxed{KH^T = \frac{c^T y^*}{a^T}} \quad (r)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_4 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$KH_1 = \frac{\left[-y. \times \frac{c^T x.}{a^T} - cy. \right]}{\sqrt{(x. + c)^T + y.^T}}$$

$$\Rightarrow KH_1^r = \frac{c^r y^r \left(\frac{cx_r}{a^r} + 1 \right)^r}{x_r^r + c^r + r cx_r + b^r - \frac{b^r x_r^r}{a^r}}$$

$$\Rightarrow KH_1^r = \frac{c^r y^r \left(\frac{cx_r}{a^r} + 1 \right)^r}{x_r^r \left(1 - \frac{b^r}{a^r} \right) + a^r + r cx_r} = \frac{c^r y^r \left(cx_r + a^r \right)^r}{\frac{c^r x_r^r}{a^r} + a^r + r cx_r}$$



شکل ۲

حل. با توجه به شکل ۲، می دانیم که معادله این بیضی به صورت $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ است، اکنون در نقطه M خطی بر بیضی

عمود می‌کنیم که معادله‌ی این خط عمود به صورت زیر است:

$$\frac{a^r x}{x_s} - \frac{b^r y}{y_s} = c^r$$

چون این خط محور x ها را در نقطه K قطع می کند، بنابراین مختصات نقطه K به صورت زیر است:

$$y = 0 \rightarrow \frac{a^T x}{x_*} = c^T \Rightarrow x = \frac{c^T x_*}{a^T} \Rightarrow K \left| \frac{c^T x_*}{a^T} \right|$$

می خواهیم ثابت کنیم که MK نیمساز زاویه $F'MF$ است،
بنابراین ثابت می کنیم که: $KH_1 = KH$.

$$\text{MF: } y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Rightarrow (x_1 - x_0)y - y_1x + cy_0 = 0$$

(معادله ی ضلع MF)

$$\text{MF}' : y \circ = \frac{y \cdot - \circ}{x \cdot + c} (x + c) \Rightarrow (x \cdot + c)y - y \cdot x - cy \cdot = \circ$$

(معادله ی ضلع MF')

برای این که ثابت کنیم $KH_1 = KH$ ، از فرمول فاصله ی نقطه از خط ، استفاده می کنیم:

$$KH = \frac{\left| -y \times \frac{c^T x}{a^T} + cy \right|}{\sqrt{(x - c)^T + y^T}} \Rightarrow KH^T = \frac{c^T y \cdot \left(\frac{cx}{a^T} - 1 \right)^T}{(x - c)^T + y^T} \quad (1)$$

حل . با توجه به شکل ، ملاحظه می کنیم که معادله این

هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ است و خط PK بر هذلولی

مماس است ، معادله خط PK در صورتی که مختصات $P \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ واقع بر هذلولی باشد ، به صورت زیر است :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

چون این خط محور x ها را در نقطه K قطع می کند ، بنابراین

مختصات K به صورت زیر است :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \frac{a^2}{x_0} \Rightarrow K \begin{vmatrix} \frac{a^2}{x_0} \\ 0 \end{vmatrix}$$

می خواهیم ثابت کنیم که PK نیمساز زاویه F'PF است ،

بنابراین ثابت می کنیم که : $KH_1 = KH$

$$PF: y - 0 = \frac{y_0 - 0}{x_0 - c}(x - c) \Rightarrow (x_0 - c)y - y_0x + cy_0 = 0$$

(معادله خط PF)

$$PF': y - 0 = \frac{y_0 - 0}{x_0 + c}(x + c) \Rightarrow (x_0 + c)y - y_0x - cy_0 = 0$$

(معادله خط PF')

برای این که ثابت کنیم $KH_1 = KH$ ؛ از فرمول فاصله نقطه

از خط ، استفاده می کنیم :

$$KH = \frac{\left| -y_0 \times \frac{a^2}{x_0} + cy_0 \right|}{\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}} \Rightarrow KH^2 = \frac{y_0^2 \left(c - \frac{a^2}{x_0} \right)^2}{(x_0 - c)^2 + y_0^2} \quad (1)$$

چون نقطه $P \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ واقع بر هذلولی است ، پس

مختصات P در معادله ی هذلولی صدق می کند :

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{b^2 x_0^2}{a^2} - b^2 \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه (2) در رابطه (1) خواهیم داشت :

$$\Rightarrow KH_1^2 = \frac{c^2 y_0^2 \frac{(cx_0 + a^2)^2}{a^4}}{(cx_0 + a^2)^2} = \frac{c^2 y_0^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow KH_1^2 = \frac{c^2 y_0^2}{a^2} \quad (4)$$

با مقایسه دو رابطه (3) و (4) ملاحظه می کنیم که

$KH_1 = KH$ ؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه F'MF

است ، بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ؛ در نتیجه داریم :

$$\begin{cases} \alpha + M_2 = 90^\circ \\ \beta + M_1 = 90^\circ \\ M_1 = M_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

ویژگی بازتابندگی هذلولی

در صورتی که یک هذلولی را حول قطر حقیقی آن دوران

دهیم ، یک هذلولی وار پدید می آید . با نقره اندود کردن درون

رویه ی هذلولی وار ، یک آینه ی هذلولی پدید می آید . در یک

آینه هذلولی ، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم ؛

پرتو نوری که از آن منبع بر آینه می تابد ، در امتداد خطی که از

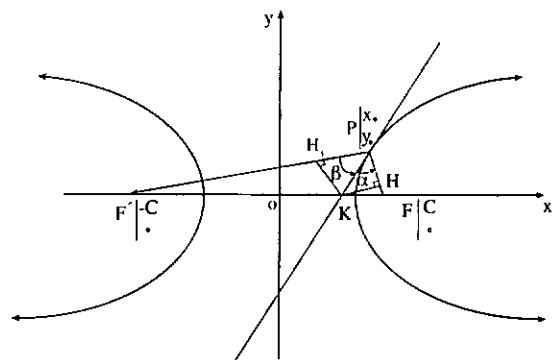
کانون دیگر می گذرد ، منعکس می شود . از این خاصیت

انعکاسی در طراحی برخی از تلسکوپ ها و سیستم های مهم

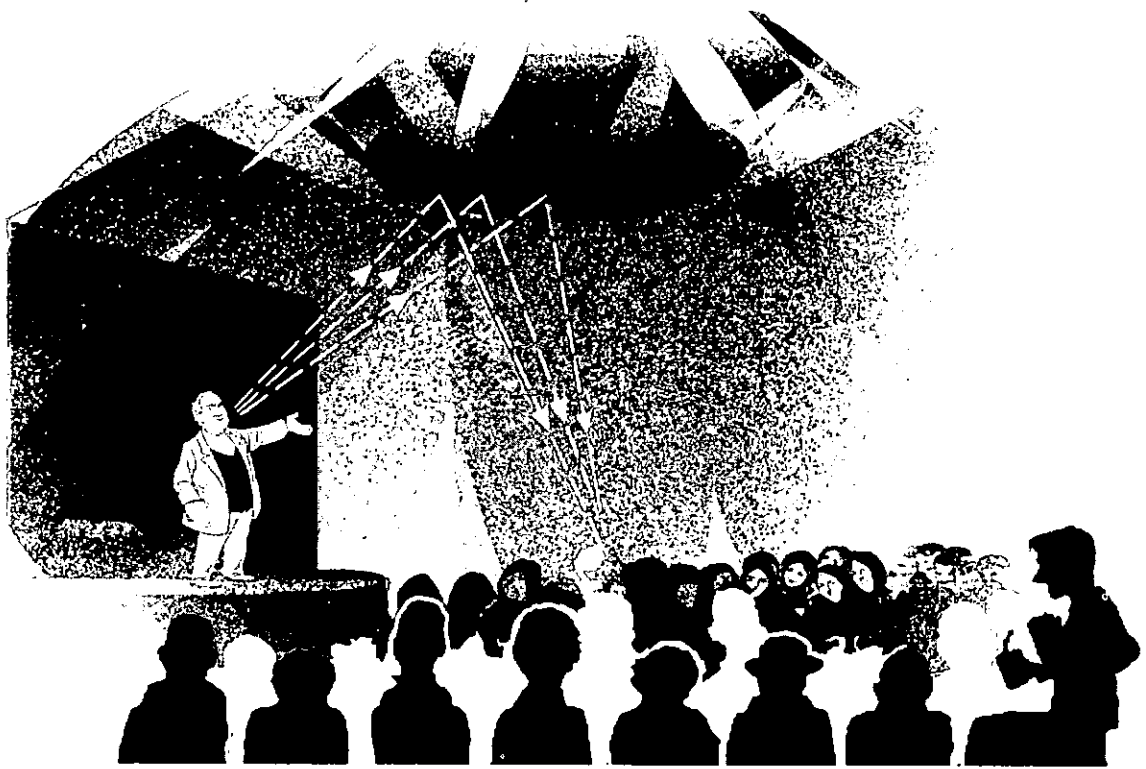
دریابندگی استفاده می شود . در شکل شماره PF3 و PF'

شعاع حامل های نقطه P و خط PK بر هذلولی مماس است .

اکنون ثابت می کنیم که : $\alpha = \beta$.



شکل ۳



$$= \frac{y_1^T \frac{(a^T + cx_1)^T}{x_1^T}}{x_1^T + 2cx_1 + c^T + \frac{b^T x_1^T}{a^T} - b^T}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_1^T \frac{(a^T + cx_1)^T}{x_1^T}}{x_1^T (1 + \frac{b^T}{a^T}) + (c^T - b^T) + 2cx_1}$$

$$= \frac{y_1^T \frac{(a^T + cx_1)^T}{x_1^T}}{\frac{c^T x_1^T}{a^T} + a^T + 2cx_1}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_1^T \frac{(a^T + cx_1)^T}{x_1^T}}{\frac{(cx_1 + a^T)^T}{a^T}} = \frac{y_1^T}{a^T x_1^T}$$

$$\Rightarrow \boxed{KH_1 = \frac{y_1^T}{a^T x_1^T}} \quad (4)$$

با مقایسه دو رابطه (3) و (4) ملاحظه می‌کنیم که

$KH_1 = KH$ ؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه $F'PF$

است ، بنابراین $\alpha = \beta$

$$KH^T = \frac{y_1^T \frac{(cx_1 - a^T)^T}{x_1^T}}{x_1^T - 2cx_1 + c^T + \frac{b^T x_1^T}{a^T} - b^T}$$

$$= \frac{y_1^T \frac{(cx_1 - a^T)^T}{x_1^T}}{x_1^T (1 + \frac{b^T}{a^T}) + (c^T - b^T) - 2cx_1}$$

می‌دانیم که در این هذلولی : $a^T + b^T = c^T$ ، پس داریم :

$$KH^T = \frac{y_1^T \frac{(cx_1 - a^T)^T}{x_1^T}}{\frac{c^T x_1^T}{a^T} + a^T - 2cx_1} = \frac{y_1^T \frac{(cx_1 - a^T)^T}{x_1^T}}{\frac{(cx_1 - a^T)^T}{a^T}} = \frac{y_1^T}{a^T x_1^T}$$

$$\Rightarrow \boxed{KH^T = \frac{y_1^T}{a^T x_1^T}} \quad (3)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_1 را به صورت زیر محاسبه کرد :

$$KH_1 = \frac{\left| -y_1 \times \frac{a^T}{x_1} - cy_1 \right|}{\sqrt{(x_1 + c)^T + y_1^T}} \Rightarrow KH_1^T = \frac{y_1^T (\frac{a^T}{x_1} + c)^T}{(x_1 + c)^T + y_1^T}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_1^T \frac{(a^T + cx_1)^T}{x_1^T}}{x_1^T + 2cx_1 + c^T + y_1^T}$$